Saut en parachute

Doc. 8,9

Le jour d'un baptême de saut en parachute, le moniteur indique les consignes à respecter pendant le saut en tandem [1] et donne l'équipement nécessaire. Un cameraman est présent tout au long de la journée pour filmer les réactions des participants avant, pendant et après le saut.

Arrivé à l'altitude du saut, le pilote met l'avion à l'horizontale, réduit sa vitesse et la fixe à environ $120\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Le moniteur ouvre la porte, le tandem s'élance hors de l'avion et le saut débute. Environ $50\,\mathrm{s}$ de chute précèdent l'ouverture du parachute. Très vite, la vitesse verticale maximale est atteinte : environ $200\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Quand le parachute s'ouvre, à $1500\,\mathrm{m}$ d'altitude, la descente « sous voile » (parachute ouvert) commence et dure 5 à 10 minutes.

D'après le site internet : www.sport-decouverte.com.

L'objectif de cet exercice est d'étudier différentes phases du saut en parachute à l'aide de données expérimentales et de modèles.

Données :

- Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.
- Valeur du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol : $g_0 = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$/
- Masse du tandem avec son équipement : $m = 200\,\mathrm{kg}$.

A Étude expérimentale du saut

Lors de son saut, un parachutiste a enregistré, à l'aide de sa montre connectée, l'altitude z au cours du temps t. L'enregistrement des données a débuté dès son entrée dans l'avion, sur la piste de décollage. À son retour, il réalise le graphique suivant en prenant comme origine des temps le début du saut.

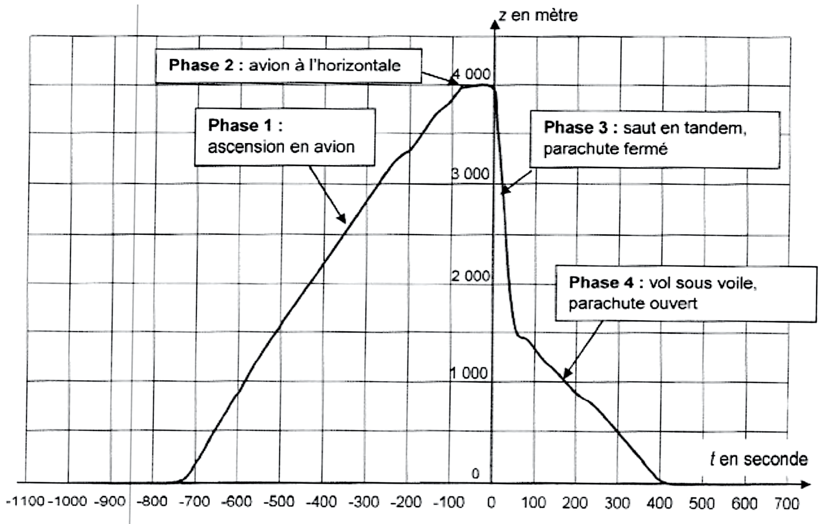


Figure 1. Représentation graphique de l'altitude z en fonction du temps

1. *tandem :* deux personnes associées.

Les données recueillies ont été utilisées pour modéliser les équations horaires $z(t)$ correspondant aux phases 1, 2, 3 et 4 du saut identifiées sur la figure 1.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en justifiant brièvement l'affectation des équations horaires aux différentes phases :

$$\begin{aligned} z_a(t) &= -50\,t + 4{,}0 \cdot 10^3 \\ z_b(t) &= -4{,}2\,t + 1{,}75 \cdot 10^3 \\ z_c(t) &= 6{,}1\,t + 4{,}6 \cdot 10^3 \\ z_d(t) &= 4{,}0 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

avec t en seconde, z en mètre et l'origine $z = 0$ prise au niveau du sol.

Solution :
- Durant la phase 1, l'altitude augmente de façon affine (pente positive). Cette évolution correspond à l'ordonnée z_c.
- Durant la phase 2, l'altitude reste constante, ce qui correspond à l'évolution de l'ordonnée z_d
- Durant la phase 3, l'altitude diminue très rapidement, de façon affine (pente négative et grande en valeur absolue). Cette évolution correspond à l'ordonnée z_a.
- Durant la phase 4, l'altitude diminue, toujours de façon affine, mais plus lentement. Cette évolution correspond à l'ordonnée z_b.

2. Montrer que la valeur de la vitesse maximale verticale citée dans l'introduction est compatible avec les données enregistrées par la montre connectée.

Solution : La phase durant laquelle le parachute est fermé est la phase 3. L'équation du mouvement est alors : $z_a(t) = -50\,t + 4{,}0 \cdot 10^3$. Comme $v_z(t) = \dfrac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}t}$, $v_z = -50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et $v = 50\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 180\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$, ce qui est proche de la valeur annoncée dans l'énoncé.

B Étude de la phase 3 du saut

On souhaite étudier l'influence de l'altitude z sur la valeur du champ de pesanteur g. On considère le critère suivant : la valeur $g(z)$ reste constante si elle diffère de moins de 1% de sa valeur au niveau du sol. L'expression de la valeur du champ de pesanteur $g(z)$ en fonction de l'altitude z est la suivante :

$$g(z) = g_0\,(1 - \frac{2z}{R_T}) \text{ si } z \ll R_T$$

3. Peut-on considérer la valeur du champ de pesanteur comme constante et égale à g_0 tout au long du saut ? Justifier.

Solution : D'après la question 1 l'altitude maximale à laquelle le parachutiste peut se trouver est $z_{max} = z_d = 4{,}0 \cdot 10^3$ m. À cette altitude, le champ de pesanteur vaut :

$$\begin{aligned} g(z_{max}) &= g_0\,(1 - \frac{2z_{max}}{R_T}) \\ &= 9{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \times \frac{1 - 2 \times 4{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}} \\ &= 0{,}999\,g_0 \end{aligned}$$

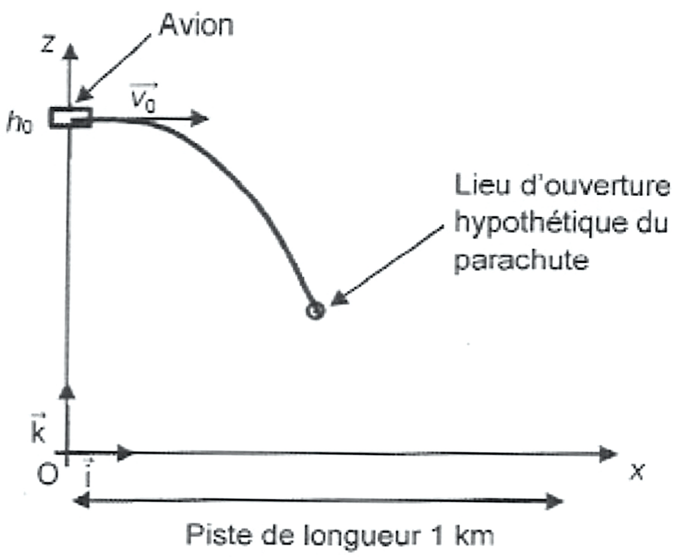
On a donc :

$$\frac{g(z_{max}) - g_0}{g_0} < 0{,}01$$

La variation du champ de pesanteur est inférieure à 1%, il peut être considéré constant.

On étudie, dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le mouvement du système tandem de masse m au cours de sa chute dans le cadre du modèle de la chute libre. Ce mouvement est étudié dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$. L'origine O du repère est placée au niveau du sol à la verticale de l'avion au moment du saut. Le plan de vol prévoit que le tandem soit largué de l'avion à une altitude h_0. La piste d'atterrissage a une longueur de 1 km et débute en O. Le tandem quitte l'avion avec une vitesse initiale de norme v_0 ; le vecteur $\vec{v_0}$ est horizontal.

On prend $v_0 = 33\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $h_0 = 4000\,\mathrm{m}$.



4. Montrer que les coordonnées du vecteur accélération du système dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$ sont :

$$a_x(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad a_z(t) = -g_0$$

Solution : L'énoncé impose d'utiliser le modèle de la chute libre ; la seule force qui s'applique sur le système est donc le poids $\vec{P}$. La deuxième loi de Newton, appliquée dans le référentiel terrestre considéré galiléen, s'écrit donc :

$$m\,\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \iff \vec{a} = \vec{g}$$

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$,

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} a_x \\ a_z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{g} := \begin{pmatrix} O \\ -g \end{pmatrix}$$

donc la projection de la deuxième loi de Newton est :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

5. Établir que les équations horaires du mouvement du système s'écrivent :

$$x(t) = v_0\, t \qquad \text{et} \qquad z(t) = -g_0\,\frac{t^2}{2} + h_0$$

Solution : À partir de la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{dt}} = 0 \iff v_x(t) = A \\ a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{dt}} = -g \iff v_z(t) = -gt + B \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} v_x(0) = A = v_0 \\ v_z(0) = B = 0 \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_z(t) = -gt \end{cases}$$

De même,

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} = v_0 \iff x(t) = v_0 t + C \\ v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dt}} = -gt \iff z(t) = -\dfrac{1}{2}\,gt^2 + D \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} x(0) = 0 \; = C \\ z(0) = h_0 = D \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}\,gt^2 + h_0 \end{cases}$$

6. En déduire que l'équation de la trajectoire $z(x)$ s'écrit :

$$z(x) = -g_0\,\frac{x^2}{2v_0^2} + h_0$$

Solution : Les équations horaires sont des équations paramétriques, puisque le temps intervient. Pour déterminer l'expression de la trajectoire, il faut écrire $z = f(x)$, c'est-à-dire éliminer le temps des équations horaires.
$t = \dfrac{x}{v_0}$, donc

$$z = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x}{v_0}\right) + h_0$$

Puisqu'on considère le champ de pesanteur uniforme,

$$z = -g_0\,\frac{x^2}{2v_0^2} + h_0$$

7. Le tandem ouvre son parachute à l'altitude $z = 1500\,\text{m}$. Montrer que, dans le cadre de ce modèle, cette ouverture s'effectue au-dessus de la piste.

Solution : À partir de l'équation de la trajectoire, on peut déterminer la valeur de l'abscisse lorsque l'altitude vaut $z = 1500\,\text{m}$:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2(h_0 - z)}{g_0}}$$

A.N. $x = 33\,33\,\text{m/s} \times \sqrt{\frac{(4000\,\text{m} - 1500\,\text{m})}{9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 7{,}5 \cdot 10^2\,\text{m} < 1 \cdot 10^3\,\text{m}.$

L'ouverture du parachute s'effectue bien au-dessus de la piste.

8. Dans le cadre de ce modèle, calculer la valeur de la durée de la phase 3 et la comparer à celle déduite du graphique (figure A). Conclure sur la pertinence du modèle de la chute libre utilisé dans cette étude.

Solution : Quelle est la valeur de la date t_p telle que $z(t_p) = 1500\,\text{m}$?

$$z(t_p) = -\frac{1}{2}\,g t_p^2 + h_0 \iff t_p = \sqrt{\frac{2(h_0 - z(t_p))}{g}}$$

A.N. $z(t_p) = \sqrt{\frac{2(4000\,\text{m} - 1500\,\text{m})}{9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 2{,}3 \cdot 10^1\,\text{s}.$

L'énoncé évoque une cinquantaine de secondes pour la durée de la « chute libre », soit plus de deux fois la valeur déterminée en appliquant le modèle de la chute libre. Ce modèle ne semble donc pas adapté à la description du mouvement du parachutiste.

C Étude de la phase 4 du saut

Lors de la descente parachute ouvert, le moniteur guide le parachute de manière à maintenir une trajectoire verticale. La force $\vec{F_f}$ modélise l'action de l'air sur le système tandem.

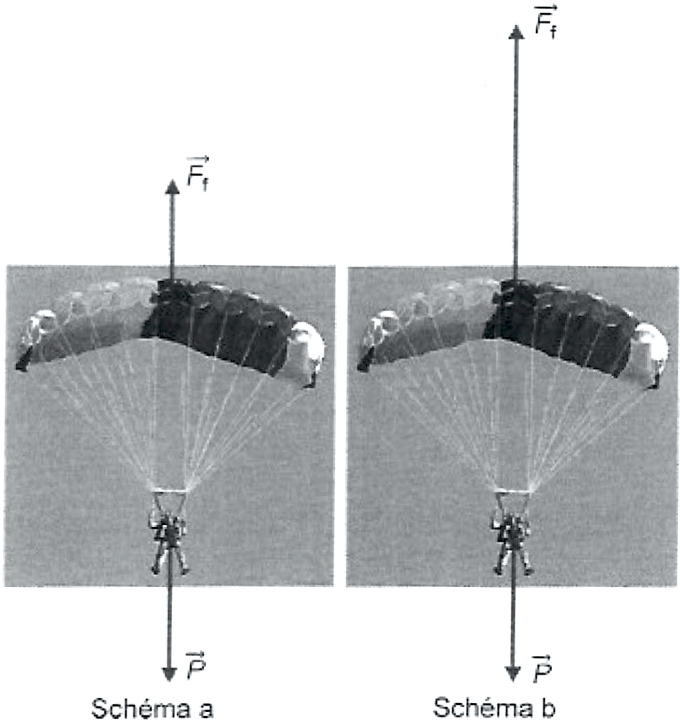


FIGURE 1 : Enter Caption

9. Associer chacun des schémas ci-dessus, réalisés sans souci d'échelle, à un instant de la chute :

1. juste après l'ouverture ;
2. quelques secondes après l'ouverture.

Justifier la réponse à partir des données expérimentales de la partie 1.

Solution : La force de frottement fluide dépend de la valeur de la vitesse. Plus cette dernière est grande, plus la force de frottement est grande. Le schéma b) est celui où la valeur de la force de frottement est la plus grande, on est donc quelques secondes après l'ouverture.

Quelques secondes après l'ouverture du parachute, la chute du tandem se fait à vitesse constante. On étudie alors le mouvement dans ces conditions.

10. Estimer la valeur de la vitesse verticale du tandem à partir des données expérimentales de la partie 1.

Solution : Dans la réponse apportée à la question 1, il a été démontré que, durant la phase 4, le mouvement est exprimé par : $z_b(t) = -4{,}2\,t + 1{,}75 \cdot 10^3$. Puisque $v_z(t) = \dfrac{\mathrm{d}z_b}{\mathrm{dt}}$, on obtient $v_z(t) = -4{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, ce qui implique que $v = 4{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

11. Déterminer la valeur, notée F_f, de la norme de la force $\vec{F_f}$ qui modélise l'action de l'air sur le système tandem.

Solution : Le mouvement est annoncé rectiligne et uniforme, donc :

$$m\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f} = 0 \iff \vec{F_f} = -\vec{P}$$

Les deux vecteurs sont colinéaires, donc $F_f = P = mg$.

A.N. $F_f = 200\,\text{kg} \times 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 1{,}96 \cdot 10^3\,\text{N}$.

12. L'expression de F_f est donnée par la relation $F_f = k\,v_z^2$, où k est une constante de l'étude et v_z désigne la coordonnée selon l'axe (Oz) de la vitesse du parachutiste. Montrer que la valeur de la constante k est de $1{,}1 \cdot 10^2$ SI.

Préciser l'unité de la constante k.

Solution : $F_f = k\,v_z^2 = k\,v^2$ donc $k = \dfrac{F_f}{v^2}$.

A.N. $k = \dfrac{1{,}96 \cdot 10^3\,\text{N}}{(4{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = 1{,}1 \cdot 10^2\,\text{N}\cdot\text{s}^2\cdot\text{m}^{-2} = 1{,}1 \cdot 10^2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

13. Calculer la valeur de l'énergie cinétique du tandem avant l'arrivée au sol.

Solution : $E_C = \dfrac{1}{2} m v_z^2$ donc $E_C = \dfrac{1}{2} \times 200\,\text{kg} \times (4{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 = 1{,}8 \cdot 10^3\,\text{J}$.

14. Le tandem possède un parachute de secours plus petit que le parachute principal. On admet que la valeur de la constante k_s de la force de frottement exercée par ce parachute vérifie la relation : $k_s = \dfrac{k}{2}$. Dans le cas où ce parachute de secours est utilisé, déterminer la valeur de la vitesse verticale v_{zs} ainsi que celle de l'énergie cinétique du tandem avant l'arrivée au sol. Commenter.

Solution : La force de frottement fluide compense le poids, sa valeur ne change donc pas. On a cependant maintenant, $F_f = k_s v_s^2$, alors $v_s = \sqrt{\dfrac{F_f}{k_s}} = \sqrt{\dfrac{2F_f}{k}} = \sqrt{2}\,v$.

A.N. $v_s = 5{,}0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La nouvelle énergie mécanique devient : $E_{Cs} = \dfrac{1}{2} m v_s^2 = \dfrac{1}{2} m(\sqrt{2}\,v)^2 = \dfrac{1}{2} m v^2 \times 2 = 2E_C$.

A.N. $E_{Cs} = 2 \times 1{,}8 \cdot 10^3\,\text{J} = 3{,}6\,\text{J}$