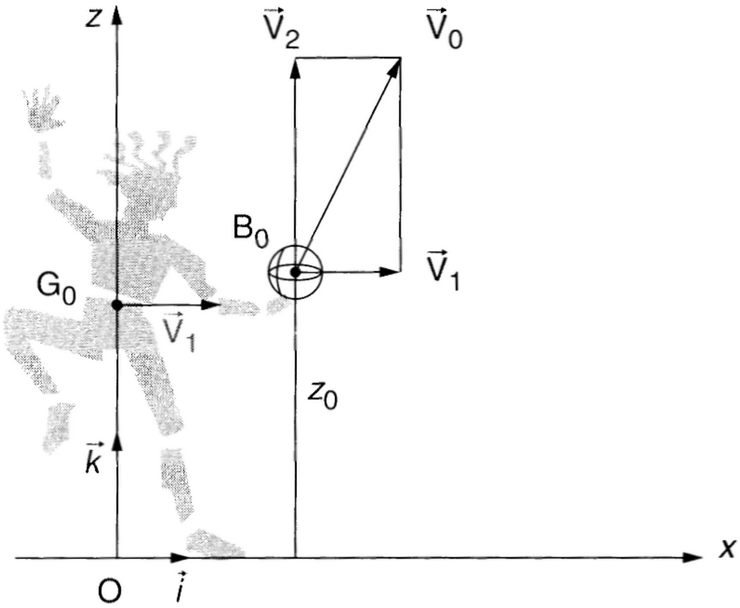
Lancer d'un ballon en GRS

Doc. 8,10

Cet exercice a pour objet l'étude du mouvement d'une gymnaste de GRS. Dans un référentiel lié à la salle de gymnastique, la gymnaste est en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V}_1$. Dans ce même référentiel, à l'instant du lancer, la vitesse du ballon est $\vec{V}_0$. Cette vitesse possède, par rapport aux axes de projection, une composante horizontale V_{0x} égale à V_1 et une composante verticale V_{0z} notée V_2.



L'instant du lancer est choisi comme origine des dates $t = 0$ s. Dans le référentiel de la salle, on considère le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini de la manière suivante : l'origine O correspond à la projection du centre d'inertie G_0 de la gymnaste sur le sol horizontal à l'instant du lancer ; l'axe (Ox) est horizontal et l'axe (Oz) vertical ascendant. Le centre B du ballon se trouve au point B_0 de coordonnées (x_0, y_0) à l'instant du lancer.

Dans la salle, le champ de pesanteur est uniforme et noté $\vec{g}$. Dans tout le problème, on néglige l'action de l'air.

Aucune application numérique n'est demandée dans cet exercice ! Toutes les réponses sont à exprimer en fonction des données : g, V_1, V_2, x_0 et z_0.

A Mouvement de la gymnaste

1. À partir de la description du mouvement de la gymnaste faite dans l'énoncé, écrire la deuxième loi de Newton décrivant ce mouvement par rapport à la salle. On notera $\vec{a}_G$ l'accélération de la gymnaste. Justifier la réponse.

Solution : Le mouvement de la gymnaste est rectiligne et uniforme, son accélération est donc nulle

$$\vec{a}_G = \vec{0}$$

2. En déduire les expressions $V_{x_G}(t)$ et $V_{z_G}(t)$ des composantes du vecteur vitesse de la gymnaste.

Solution : On projette la deuxième loi de Newton dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} a_{x_G} = 0 = \dfrac{\mathrm{d}V_{x_G}}{\mathrm{dt}} \implies V_{x_G}(t) = A \\ a_{z_G} = 0 = \dfrac{\mathrm{d}V_{z_G}}{\mathrm{dt}} \implies V_{z_G}(t) = B \end{cases}$$

Les conditions initiales pour le mouvement de la gymnaste ne sont pas explicitement données mais on sait qu'à chaque instant :

$$\begin{cases} V_{x_G}(t) = V_1 \implies V_{x_G}(0) = V_1 = A \\ V_{z_G}(t) = 0 \implies V_{Z_G}(0) = 0 = B \end{cases}$$

On en conclut donc que

$$\begin{cases} V_{x_G}(t) = V_1 \\ V_{z_G}(t) = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer les équations horaires $x_G(t)$ et $z_G(t)$ du mouvement du centre d'inertie G de la gymnaste par rapport au référentiel lié à la salle.

Solution :

$$\begin{cases} V_{x_G} = \dfrac{\mathrm{d}x_G}{\mathrm{dt}} = V_1 \implies x_G(t) = V_1 t + C \\ V_{z_G} = \dfrac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{dt}} = 0 \implies z_G(t) = D \end{cases}$$

On considère que la gymnaste se trouve à l'origine du repère à la date $t = 0$. On a donc :

$$\begin{cases} x_G(0) = V_1 \times 0 + C = 0 \implies C = 0 \\ z_G(0) = D = z_{G0} \implies D = z_{G0} \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{cases} x_G(t) = V_1 t \\ z_G(t) = z_{G0} \end{cases}$$

B Mouvement du ballon

4. À partir des informations données dans l'énoncé, indiquer comment la gymnaste lance le ballon, *par rapport à un référentiel qui lui serait lié.*

La réponse à cette question n'est pas indispensable à la poursuite de cet exercice.

Solution : Grâce au schéma donné, on constate que la vitesse initiale $\vec{V_0}$ que la gymnaste communique au ballon possède une composante horizontale $\vec{V_1}$, identique à la vitesse de la gymnaste. On peut donc en déduire que la gymnaste lance le ballon verticalement vers le haut (par rapport à elle-même).

5. Écrire la deuxième loi de Newton pour le mouvement du ballon par rapport à la salle. On notera $\vec{a}_B$ l'accélération du ballon.

Comment peut-on qualifier le mouvement du ballon ?

Solution :

- Système = {ballon}
- Référentiel = {terrestre considéré galiléen}
- Interactions :
  - Système - air : négligée ;
  - Sytème - champ de pesanteur modélisée par le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.
- Deuxième loi de Newton : $m\vec{a}_G = m\vec{g} \iff \vec{a}_G = \vec{g}$

Le ballon est en chute libre.

6. En déduire les expressions $V_{x_B}(t)$ et $V_{z_B}(t)$ des composantes du vecteur vitesse du ballon.

Solution : On projette la deuxième loi de Newton dans le repère $(O;\vec{i},\vec{k})$:

$$\begin{cases} a_{x_B} = \dfrac{\mathrm{d}V_{x_B}}{\mathrm{dt}} = 0 \implies V_{x_B}(t) = E \\ a_{z_G} = \dfrac{\mathrm{d}V_{z_B}}{\mathrm{dt}} = -g \implies V_{z_B}(t) = -gt + F \end{cases}$$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} V_{x_B}(0) = E = V_1 \implies E = V_1 \\ V_{z_B}(0) = -g \times 0 + F = V_2 \implies F = V_2 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} V_{x_B}(t) = V_1 t \\ V_{z_B}(t) = -gt + V_2 \end{cases}$$

7. En déduire les équations horaires $x_B(t)$ et $z_B(t)$ du ballon.

Solution :

$$\begin{cases} V_{x_B}(t) = \dfrac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{dt}} = V_1 \implies x_B(t) = V_1 t + G \\ V_{z_B}(t) = \dfrac{dz_B}{\mathrm{dt}} = -gt + V_2 \implies z_B(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + V_2 t + H \end{cases}$$

Conditions initiales :

$$\begin{cases} x_B(0) = V_1 \times 0 + G = x_0 \implies G = x_0 \\ z_B(0) = -\dfrac{1}{2}g \times 0^2 + V_2 \times 0 + H = z_0 \implies H = z_0 \end{cases}$$

Finalement,

$$\begin{cases} x_B(t) = V_1 t + x_0 \\ z_B(t) = -\dfrac{1}{2}\,gt^2 + V_2 t + z_0 \end{cases}$$

8. Déterminer l'équation de la trajectoire du point B et tracer, à la main, l'allure de la courbe correspondante sur votre feuille, en y faisant apparaître le vecteur $\vec{V_0}$.

Solution : Pour déterminer l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps des équations horaires.

Comme

$$t = \frac{x_B - x_0}{V_1}$$

l'équation de la trajectoire est :

$$z_B = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{x_B - x_0}{V_1}\right)^2 + V_2\left(\frac{x_B - x_0}{V_1}\right) + z_0$$

9. uelles sont les caractéristiques du vecteur vitesse du point B au sommet de sa trajectoire ? Quelle est la hauteur maximale atteinte par le point B ?

Solution : Au sommet de la trajectoire, la composante verticale de la vitesse s'annule. Le vecteur vitesse est alors horizontal.

Soit t_S la date à laquelle le ballon atteint le sommet de la trajectoire. t_S est donc telle que

$$V_{x_B}(t_S) = 0$$

On a donc
$$0 = -g t_S + V_2 \iff t_S = \frac{V_2}{g}$$
Si on injecte l'expression de t_S dans l'équation horaire qui donne l'altitude du ballon, on obtient
$$z_B(t_S) = -\frac{1}{2}\, g\, t_S^2 + V_2\, t_S + z_0 \iff z_B(t_S) = \frac{1}{2}\,\frac{V_2^2}{g} + z_0$$

C Rattraper du ballon par la gymnaste

10. La gymnaste récupère le ballon lorsque son centre B repasse à l'altitude z_0. Déterminer le temps de vol t_V du ballon.

Comment la gymnaste peut-elle augmenter cette durée ?

Solution : La date t_V est telle que $z_B(t_V) = z_0$. On a donc :
$$-\frac{1}{2}\, g\, t_V^2 + V_2\, t_V + z_0 = z_0 \iff t_V \left(-\frac{1}{2} g t_V + V_2\right) = 0$$
L'équation admet deux solutions : $t_V = 0$ (c'est l'instant du lancer) et $t_V = \dfrac{2V_2}{g}$.

La gymnaste peut augmenter le temps de vol en lançant le ballon vers le haut avec une vitesse initiale V_2 plus grande (elle peut aussi se rendre sur la Lune, de façon à ce que la valeur de $\vec{g}$ soit plus petite).

11. Déterminer la distance parcourue par le centre d'inertie B du ballon suivant l'axe horizontal (Ox) pendant le temps de vol. De quel(s) paramètre(s) dépend cette distance ?

Solution : À la date t_V, le ballon se trouve à l'abscisse $x_B(t_V)$ dont l'expression est :
$$x_B(t_V) = \frac{2V_1V_2}{g} + x_0$$
Comme l'abscisse à laquelle se trouve le ballon à la date $t = 0$ est x_0, la distance parcourue horizontalement pendant la durée t_V est :
$$x_B(t_V) - x_B(0) = \frac{2V_1V_2}{g} + x_0 - x_0 = \frac{2V_1V_2}{g}$$
On constate que la distance parcourue horizontalement par le ballon, pendant la durée t_V, dépend des deux composantes de la vitesse initiale communiquée par la gymnaste :

- plus elle va vite (horizontalement) plus la distance parcourue est grande ;
- plus elle lance le ballon avec une vitesse verticale élevée, plus la distance parcourue est grande.

12. Montrer que la distance parcourue par le centre d'inertie G de la gymnaste pendant ce temps de vol est identique et qu'elle a donc de grandes chances de rattraper le ballon.

Solution : On cherche à déterminer la distance parcourue par la gymnaste pendant le temps de vol du ballon.

À la date t_V, l'abscisse à laquelle se trouve la gymnaste est
$$x_G(t_V) = V_1\, t_V = \frac{2V_1V_2}{g}$$
Elle parcourt donc la distance :
$$x_G(t_V) - x_G(0) = \frac{2V_1V_2}{g}$$
La gymnaste parcourt la même distance que le ballon horizontalement. Elle a donc de fortes chances de le rattraper.