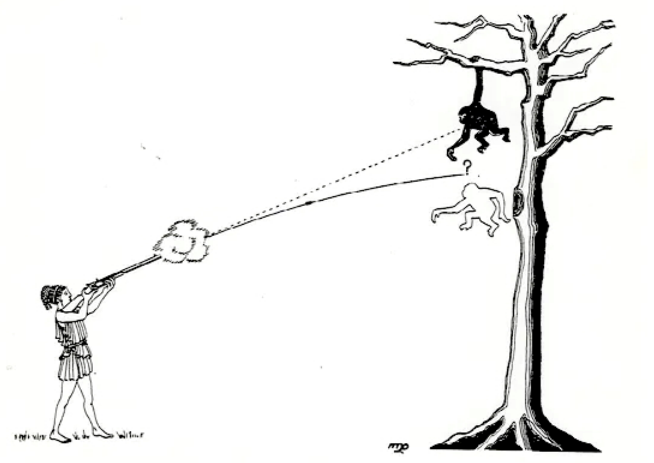
Le problème du chasseur et du singe

Doc. 8,8



A Problème à résoudre

Un chasseur vise directement, à l'aide de son arme, un singe suspendu à un arbre. À la date $t = 0$, le projectile quitte l'arme. Le singe, sur ses gardes, repère instantanément la menace et, effrayé, lâche la branche à laquelle il était suspendu et se laisse tomber.

La décision du singe vous semble-t-elle pertinente ?

B Modélisation du problème

- Le singe et le projectile sont modélisés par des points.
- L'interaction des systèmes avec l'air est négligée.
- On définit le repère de projection $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que :
  - O coïncide avec la position initiale du projectile,
  - $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Ox) horizontal dirigé vers la droite,
  - $\vec{j}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Oy) vertical dirigé vers le haut.
- Le chasseur se trouve à la distance (horizontale) D de l'arbre.
- Le singe se trouve initialement à l'altitude H dans le repère de projection.
- Le projectile quitte l'arme avec la vitesse $\overrightarrow{V_0}$ dont la direction passe par le singe et fait un angle α avec l'horizontale.
- Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme.
- On suppose que la portée du projectile est supérieure à la distance D.

C Aide : étapes de résolution du problème

1. Établir les équations horaires du mouvement du projectile.
2. Établir les équations horaires du mouvement du singe.
3. Déterminer à quelle date t_I le projectile se trouve à l'abscisse D.
4. En déduire l'altitude du projectile à l'instant t_I.
5. En déduire l'altitude du singe à l'instant t_I.
6. Conclure

D Éléments de correction

Remarque : il faut bien évidemment être capable de démontrer toutes les expressions données.

1. Équations horaires du projectile :

$$\begin{cases} x_P(t) = V_0 \cos(\alpha) t \\ y_P(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + V_0 \sin(\alpha) t \end{cases}$$

2. Équations horaires du singe :

$$\begin{cases} x_S(t) = D \\ y_S(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + H \end{cases}$$

3. t_I est telle que $x_P(t_I) = D$ donc

$$V_0 \cos(\alpha) t_I = D \iff t_I = \frac{D}{V_0 \cos(\alpha)}$$

4.

$$\begin{aligned} y_P(t_I) &= -\frac{1}{2}gt_I^2 + V_0\sin(\alpha)t_I \\ &= -\frac{1}{2}g\left(\frac{D}{V_0\cos(\alpha)}\right)^2 \\ &\quad + V_0\sin(\alpha)\left(\frac{D}{V_0\cos(\alpha)}\right) \end{aligned}$$

En simplifiant on obtient :

$$y_P(t_I) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{D}{V_0\cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha)D$$

5. Quelle est l'altitude du singe à la date t_I ?

$$y_S(t_I) = -\frac{1}{2}gt_I^2 + H = -\frac{1}{2}g\left(\frac{D}{V_0\cos(\alpha)}\right)^2 + H$$

6. Pour comparer les altitudes du singe et du projectile on peut étudier le résultat de leurs différence :

$$y_S(t_I) - y_P(t_I) = H - \tan(\alpha)D$$

Si on dessine le schéma de la situation, on se rend compte que $\tan(\alpha) = \dfrac{H}{D}$, on peut donc conclure que :

$$y_S(t_I) - y_P(t_I) = 0$$

Le projectile rencontre le singe, ce dernier n'aurait pas du se laisser tomber.

Comment comprendre la situation ? Le singe et la flèche ont la même accélération, ils tombent au sol avec une accélération $a = g$. Par rapport au singe, la flèche possède donc un mouvement rectiligne dirigé vers lui puisqu'elle tombe exactement comme lui.