Mouvement d'un système ponctuel dans le champ de pesanteur uniforme

Chap. 8,2

A Objectif

Cette séance a pour objet l'étude du mouvement d'un système ponctuel dans le champ de pesanteur uniforme. Après avoir revu la notion de champ, nous appliquerons les lois de Newton étudiées au chapitre précédent, puis les théorèmes énergétiques vus en première.

B Champ de pesanteur

B.1 Qu'est-ce qu'un champ ?

En physique, un **champ** est la représentation, *en chaque point de l'espace*, d'une grandeur physique. Cette dernière peut être **scalaire** (pression, température, ...) ou **vectorielle** (vitesse, champ électrique, ...).

Les physiciens considèrent que toutes les interactions se produisent via des champs, qu'ils soient gravitationnels, électromagnétiques, nucléaires, etc. *Un corps A crée dans l'espace un champ qui est responsable de l'apparition d'une force qui agit sur tout objet B situé à cet endroit* (si cet objet est sensible à l'interaction, bien entendu). Ce champ existe, que l'objet B soit présent ou non, et peut perdurer même si le corps A disparaît ou se déplace[1].

B.2 Qu'est-ce que le champ de pesanteur en un point de l'espace ?

L'interaction entre une masse ponctuelle m_1, située à un point M à proximité de la Terre, et la Terre elle-même est modélisée par une force nommée poids, notée $\overrightarrow{P_1}$. Cette force est orientée vers la Terre et suit la direction verticale du lieu, avec une intensité proportionnelle à la masse m_1.

De même, une masse m_2 placée au même point M est soumise à la force $\overrightarrow{P_2}$ de même direction et sens que $\overrightarrow{P_1}$ et de valeur toujours proportionnelle à cette masse m_2.

On peut renouveler l'opération avec une masse m_3, on obtient un comportement similaire à ceux décrits ci-dessus.

On peut résumer la situation en écrivant que :

$$\frac{\overrightarrow{P_1}}{m_1} = \frac{\overrightarrow{P_2}}{m_2} = \frac{\overrightarrow{P_3}}{m_3} = \dots$$

1. En effet l'information selon laquelle A s'est déplacé ou a disparu se propage à une vitesse finie. Par exemple, on voit dans le ciel des étoiles qui ont disparu ou qui ne se trouvent plus à l'endroit où on les vise.

La Terre communique donc au point M de l'espace une propriété telle que toute masse ponctuelle qui est placée en ce point est soumise à une action proportionnelle à la valeur de cette masse et appelée poids. **L'action par unité de masse qu'exerce la Terre sur n'importe quelle masse en un point M est appelée le *champ de pesanteur au point M*** et notée $\vec{g}(M)$.

Le champ de pesanteur $\vec{g}(M)$ est donc tel que :

$$\vec{g}(M) = \left(\frac{\vec{P}_1}{m_1}\right)_{\text{en } M} = \left(\frac{\vec{P}_2}{m_2}\right)_{\text{en } M} = \left(\frac{\vec{P}_3}{m_3}\right)_{\text{en } M} = \dots$$

ou

$$\vec{P}_1\,(M) = m\,\vec{g}(M)$$

B.3 Le champ de pesanteur est un champ uniforme

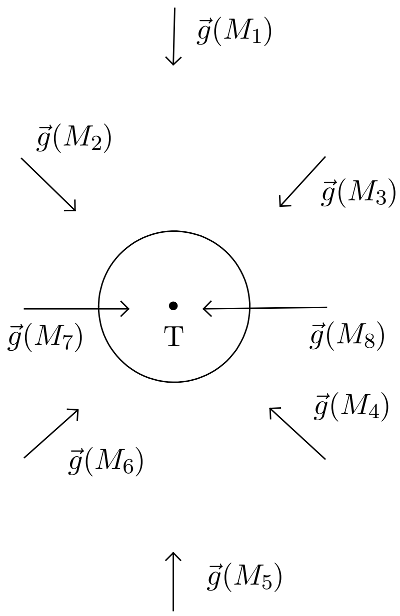


Figure 1. *Champ de pesanteur non uniforme.*

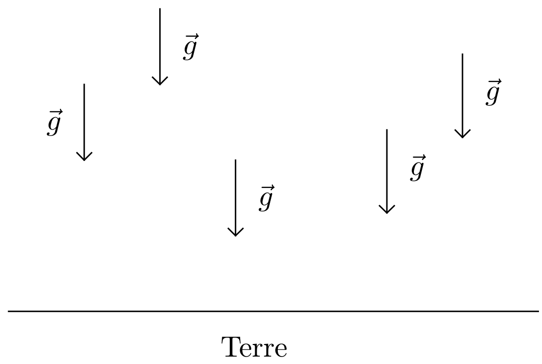


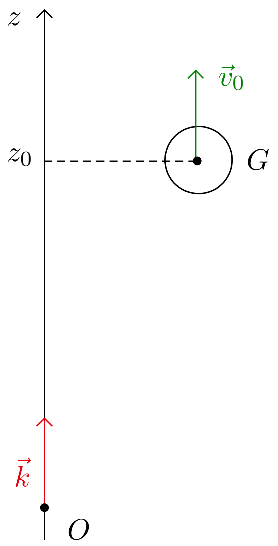
Figure 2. *Champ de pesanteur uniforme.*

À l'échelle de la planète, *la direction et la valeur du champ de pesanteur varient*. Cependant, on peut déterminer que pour deux points de la surface de la terre distants de 2 kilomètres l'angle que font entre eux deux vecteurs champ de pesanteur $\vec{g}(M_1)$ et $\vec{g}(M_2)$ est de l'ordre de 0,01° et que l'intensité (ou valeur) du champ de pesanteur varie de moins de 1% lorsqu'on s'élève de 32 km. Par conséquent, pour des régions de l'espace limitées à quelques kilomètres, on peut considérer que $\vec{g}$ est un *vecteur pratiquement constant*. On dit alors que le *champ* *de pesanteur est uniforme.*

Attention. Lorsqu'on dit qu'un champ est uniforme, on ne se limite pas à sa valeur ! Uniforme est ici synonyme de constant !

C Chute verticale d'une balle dans le champ de pesanteur uniforme. Utilisation des lois de Newton

C.1 Situation étudiée



On lance une balle, de masse m, verticalement vers le haut depuis l'altitude z_0 au dessus de l'origine choisie.

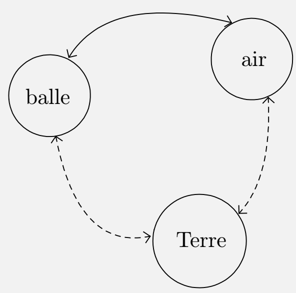
On cherche à déterminer :

1. Quelle sera l'altitude maximale $z_{\max}$ que la balle va atteindre.
2. Quelle sera la valeur v_1 de la vitesse lorsque la balle repassera à l'altitude z_0.
3. Quelle sera la relation entre v_1 et v_0.
4. Quelle sera la durée au bout de laquelle la balle atteindra le sol (origine des altitudes).
5. Quelle sera la vitesse de la balle lorsqu'elle atteindra le sol.

C.2 Mise en équation

1) Construire le diagramme objets – interactions de la situation étudiée.

► **Réponse.**



2) Quel est le système étudié ?

► **Réponse.**

Système = {centre d'inertie de la balle}

3) Dans quel référentiel l'étude est-elle menée ?

► **Réponse.**

On choisit d'étudier le mouvement du centre d'inertie de la balle dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

4) Déduire de la question précédente les interactions à prendre en compte et les modéliser.

► **Réponse.**

Étude des interactions :

– Système – Terre : on la modélise par le poids $\vec{P}$.

– Système – Air : on la néglige dans cette étude.

Remarque. La balle est un objet dense et peu volumineux, l'interaction avec l'air peut être négligée.

5) Schématiser la situation.

6) Écrire la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression du vecteur accélération du centre d'inertie de la balle.

► **Réponse.**

Deuxième loi de Newton :

$$m\,\vec{a}_G = \vec{P} = m\,\vec{g}$$

avec $\vec{a}$ l'accélération du système.

Finalement,

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

Le vecteur accélération est colinéaire et de même sens que le vecteur champ de pesanteur.

7) Donner la caractéristique du mouvement du centre d'inertie de la balle.

▶ **Réponse.**

L'accélération est un vecteur constant : *le mouvement est uniformément accéléré.*

8) Quelle particularité présente l'accélération du centre d'inertie de la balle ?

▶ **Réponse.**

L'accélération est indépendante de la masse du système. Deux systèmes de masses différentes accélèrent de façon identique, *si l'interaction avec l'air peut être négligée.*

On appelle « **chute libre** dans le champ de pesanteur » (ici terrestre) un mouvement pour lequel la seconde loi de Newton s'écrit :

$$\vec{a}_G = \vec{g} \tag{1}$$

C.3 Établissement des équations horaires du mouvement

On appelle **équations horaires** les expressions des coordonnées d'un système en fonction du temps.

C.3.1 Projection de l'équation du mouvement

9) Établir, à partir de la relation (1), l'expression de a_z, la composante du vecteur accélération dans le repère $(O;\vec{k})$.

▶ **Réponse.**

Dans le repère $(O;\vec{k})$, $\vec{g} = -g\,\vec{k}$ et $\vec{a_G} = a_z\,\vec{k}$. On peut écrire, de façon équivalente, les coordonnées de ces vecteurs :

$$\vec{g}\,(-g) \ \text{ et } \ \vec{a_G}\,(a_z)$$

Note. L'inconnue a_z, comme toute composante d'un vecteur le long d'une axe, est une **grandeur algébrique** (positive, nulle ou négative, donc) ; son **signe** donne une indication du **sens** du vecteur $\vec{a_G}$ (comparativement à celui du vecteur $\vec{k}$), sa **valeur absolue** est égale à la **valeur** du vecteur $\vec{a_G}$.

Finalement l'équation (1) s'écrit, une fois projetée,

$$a_z = -g \tag{2}$$

Remarque. Comme le mouvement est manifestement vertical — à une dimension donc — on a choisi le repère cartésien à une dimension $(O;\vec{k})$.

C.3.2 Détermination de la composante v_z de la vitesse le long de l'axe (Oz)

10) Établir, à partir de la relation (2), l'expression de la composante v_z de la vitesse du système en fonction du temps.

► **Réponse.**

Puisque l'*accélération est le taux de variation instantanée de la vitesse*, $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$ et

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g \tag{3}$$

On cherche donc à déterminer l'expression de la fonction $v_z(t)$ à partir de celle de sa dérivée. Ce raisonnement s'appelle *intégration* en mathématique.

Avertissement. Dans ce cours, il n'est pas nécessaire de savoir intégrer, il suffit par exemple d'essayer de répondre à la question suivante : « *Quelle fonction v_z de la variable t, une fois dérivée par rapport à t, est égale à la constante $-g$?* »

$$(3) \Rightarrow v_z(t) = -g\,t + A$$

où A est une constante réelle, puisque $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(-g\,t + A)}{\mathrm{d}t} = -g$.

Nous n'avons pas trouvé une fonction v_z mais une famille de fonctions, puisque A peut être n'importe quel réel. Afin de déterminer *la fonction solution du problème* il est nécessaire (et c'est suffisant) de connaître sa valeur à une date. On choisit généralement la date $t = 0$ et on appelle alors cette valeur la « *condition initiale* ».

$v_z(0) = -g \times 0 + A = v_0 \Leftrightarrow A = v_0$ car $\vec{v_0} = v_0\,\vec{k}$ est la vitesse initiale du système.

Finalement

$$v_z(t) = -g\,t + v_0 \tag{4}$$

C.3.3 Détermination de la composante z de la position le long de l'axe (Oz)

11) Établir, à partir de la relation (4), l'expression de la composante z de la position du système en fonction du temps.

▶ **Réponse.**

Puisque la vitesse est le taux de variation instantanée de la position, $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ et

$$(4) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -g\,t + v_0 \tag{5}$$

Ici encore il est nécessaire de se poser la question : *quelle fonction z de la variable t, une fois dérivée par rapport à t, est égale à la constante $-g\,t + v_0$?*

$$(5) \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0\,t + B$$

où B est une constante réelle, puisque $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(-1/2\,g\,t^2 + v_0\,t + B)}{\mathrm{d}t} = -g\,t + v_0$.

Pour déterminer *la fonction z recherchée*, il est ici aussi nécessaire d'utiliser une *condition initiale* : $z(0) = -\dfrac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 + B = z_0 \Leftrightarrow B = z_0$.

Finalement

$$z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + v_0\,t + z_0 \tag{6}$$

C.4 Utilisation des équations horaires

C.4.1 Détermination de l'altitude $z_{\max}$

12) Établir l'expression de l'altitude maximale $z_{\max}$ à laquelle le système parvient.

▶ **Réponse.**

Lorsque la balle se trouve à sa position d'altitude maximale, *sa vitesse est nulle*. Donc

$$v_z(t_{\max}) = 0 = -g\,t_{\max} + v_0$$

soit

$$t_{\max} = \frac{v_0}{g}$$

et comme

$$z_{\max} = z(t_{\max}) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\,\frac{v_0}{g} + z_0$$

alors

$$z_{\max} = \frac{1}{2}\,\frac{v_0^2}{g} + z_0$$

Note. Les équations horaires donnent l'expression des coordonnées d'espace en fonction du temps. *Toute question dont la résolution nécessite l'utilisation des équations horaire doit donc être reformulée de façon à faire apparaître le temps.*

Par exemple, la question « Déterminer l'altitude maximale atteinte par le système » doit devenir « À quelle date le système parvient-il à l'altitude maximale » puis « Quelle est l'altitude à cette date » ?

C.4.2 Détermination de la valeur de la vitesse v_1 lorsque la balle repasse à l'altitude z_0

13) Déterminer la valeur v_1 de la vitesse lorsque la balle repasse à l'altitude z_0 en fonction de v_0.

► **Réponse.**

La balle repasse à l'altitude z_0 à la date t_1 telle que

$$z(t_1) = z_0 = -\frac{1}{2} g\, t_1^2 + v_0\, t_1 + z_0$$

Donc

$$0 = t_1 \left(-\frac{1}{2}\, g\, t_1 + v_0 \right)$$

L'équation précédente admet deux solutions : $t_1 = 0$ (bien évidemment ce n'est pas celle que l'on cherche) et $t_1 = \dfrac{2\, v_0}{g}$.

La composante de la vitesse à la date t_1 est :

$$\begin{aligned} v_z(t_1) &= -\ g\, t_1 + v_0 \\ &= -g\frac{2\, v_0}{g} + v_0 \\ &= -v_0 \end{aligned}$$

et sa valeur

$$v_1 = |v_z(t_1)| = v_0$$

La balle repasse à l'altitude z_0 avec sa vitesse initiale.

C.4.3 Détermination de la date d'arrivée au sol (altitude nulle) et de la vitesse du système à cette date

14) Déterminer les expressions de la date d'arrivée à l'altitude zéro et de la valeur de la vitesse à cet instant.

▶ **Réponse.**

Si le centre d'inertie de la balle arrive au niveau du sol à la date t_2, alors

$$z(t_2) = 0 = -\frac{1}{2} g\, t_2^2 + v_0\, t_2 + z_0$$

t_2 est donc la racine positive du polynôme du second degré.

Une fois cette date déterminée, la vitesse du système au niveau du sol s'obtient à partir de l'expression de v_z :

$$v_2 = |v_z(t_2)| = |-g\, t_2 + v_0|$$

D Chute verticale d'une balle dans le champ de pesanteur uniforme. Utilisation des théorèmes énergétiques

D.1 Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

15) Déterminer l'altitude maximale $z_{\max}$ à laquelle la balle parvient, par application du théorème de l'énergie cinétique.

▶ **Réponse.**

On note A le point où se trouve le centre d'inertie du système à la date $t = 0$ et B le point d'altitude maximale. Le théorème de l'énergie cinétique, pour le déplacement $A \longrightarrow B$, s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = W_{\mathrm{AB}}(\vec{P})$$

Comme $E_C(A) = \frac{1}{2} m\, v_0^2$, $E_C(B) = 0$ et $W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -P\,(z_B - z_A) = -m\, g\,(z_{\max} - z_0)$,

$$0 - \frac{1}{2} m\, v_0^2 = -m\, g\,(z_{\max} - z_0) \Longleftrightarrow z_{\max} = z_0 + \frac{v_0^2}{2\, g}$$

16) Déterminer la valeur v_1 de la vitesse lorsque la balle repasse à l'altitude z_0 en fonction de v_0, par application du théorème de l'énergie cinétique.

▶ **Réponse.**

On note C le point qui coïncide avec A et qui est atteint par la balle lors de la descente. Le théorème de l'énergie cinétique, pour le déplacement $A \longrightarrow C$, s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(C) - E_C(A) = W_{\mathrm{AC}}(\vec{P})$$

Comme $E_C(C) = \frac{1}{2} m\, v_1^2$, $E_C(A) = \frac{1}{2} m\, v_0^2$ et $W_{\mathrm{AC}}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0$,

$$\frac{1}{2} m\, v_1^2 - \frac{1}{2} m\, v_0^2 = 0 \Longleftrightarrow v_1 = v_0$$

17) Déterminer la valeur v_2 de la vitesse lorsque la balle arrive au niveau du sol, par application du théorème de l'énergie cinétique.

► **Réponse.**

On note D le point du sol qui est atteint par la balle à l'issue de la descente. Le théorème de l'énergie cinétique, pour le déplacement $A \longrightarrow D$, s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(D) - E_C(A) = W_{\text{AD}}(\vec{P})$$

Comme $E_C(D) = \dfrac{1}{2}\, m\, v_2^2$, $E_C(A) = \dfrac{1}{2}\, m\, v_0^2$ et $W_{\text{AD}}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} = -P\,(z_D - z_A) = m\, g\,(z_A - z_D) = m\, g\, z_0$,

$$\frac{1}{2}\, m\, v_2^2 - \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 = m\, g\, z_0 \Longleftrightarrow v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, z_0}$$

D.2 Utilisation du théorème de l'énergie mécanique

18) Déterminer l'altitude maximale $z_{\max}$ à laquelle la balle parvient, par application du théorème de l'énergie mécanique.

► **Réponse.**

On note A le point où se trouve le centre d'inertie du système à la date $t = 0$ et B le point d'altitude maximale. Puisqu'on néglige les frottements, le système est conservatif et l'application du théorème de l'énergie mécanique, pour le déplacement $A \longrightarrow B$, s'écrit :

$$\Delta E_M = E_M(B) - E_M(A) = 0$$

Comme $E_M(A) = \dfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 + m\, g\, z_0$ et $E_M(B) = 0 + m\, g\, z_{\max}$,

$$0 + m\, g\, z_{\max} - \left(\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 + m\, g\, z_0\right) = 0 \Longleftrightarrow z_{\max} = z_0 + \frac{v_0^2}{2\, g}$$

19) Déterminer la valeur v_1 de la vitesse lorsque la balle repasse à l'altitude z_0 en fonction de v_0, par application du théorème de l'énergie mécanique.

► **Réponse.**

On note C le point qui coïncide avec A et qui est atteint par la balle lors de la descente. Puisqu'on néglige les frottements, le système est conservatif et l'application du théorème de l'énergie mécanique, pour le déplacement $A \longrightarrow C$, s'écrit :

$$\Delta E_M = E_M(C) - E_M(A) = 0$$

Comme $E_M(C) = \dfrac{1}{2}\, m\, v_1^2 + m\, g\, z_0$ et $E_M(A) = \dfrac{1}{2}\, m\, v_0^2 + m\, g\, z_0$,

$$\frac{1}{2}\, m\, v_1^2 + m\, g\, z_0 - \left(\frac{1}{2}\, m\, v_0^2 + m\, g\, z_0\right) = 0 \Longleftrightarrow v_1 = v_0$$

20) Déterminer la valeur v_2 de la vitesse lorsque la balle arrive au niveau du sol, par application du théorème de l'énergie mécanique.

► **Réponse.**

On note D le point du sol qui est atteint par la balle à l'issue de la descente. Puisqu'on néglige les frottements, le système est conservatif et l'application du théorème de l'énergie mécanique, pour le déplacement $A \longrightarrow D$, s'écrit :

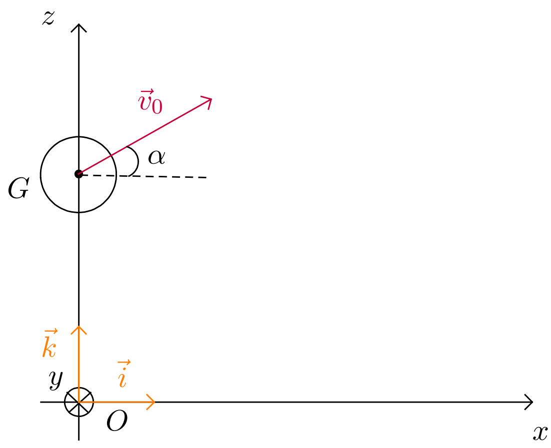
$$\Delta E_M = E_M(D) - E_M(A) = 0$$

Comme $E_M(D) = \frac{1}{2} m\, v_2^2 + 0$ et $E_M(A) = \frac{1}{2} m\, v_0^2 + m\, g\, z_0$,

$$\frac{1}{2} m\, v_2^2 + 0 - \left(\frac{1}{2} m\, v_0^2 + m\, g\, z_0\right) = 0 \Longleftrightarrow v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2\, g\, z_0}$$

E Mouvement plan d'une balle dans le champ de pesanteur uniforme. Utilisation des lois de Newton.

E.1 Situation étudiée



On lance une balle, de masse m, vers le haut et vers la droite, avec un angle α par rapport à l'axe $(O\,x)$, depuis l'altitude z_0 au dessus de l'origine choisie.

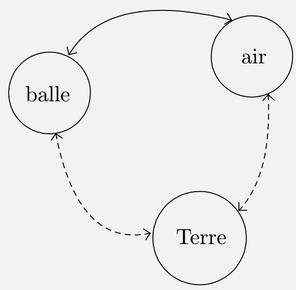
On cherche à déterminer :

1. La forme de la trajectoire.
2. L'altitude maximale $z_{\max}$ jusqu'à laquelle la balle va s'élever.
3. La portée du lancer, c'est à dire la distance parcourue horizontalement par la balle avant de toucher le sol.

E.2 Mise en équation

21) Construire le diagramme objets – interactions de la situation étudiée.

► **Réponse.**



22) Quel est le système étudié ?

▶ **Réponse.**

Système = {centre d'inertie de la balle}

23) Dans quel référentiel l'étude est-elle menée ?

▶ **Réponse.**

On choisit d'étudier le mouvement du centre d'inertie de la balle dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

24) Déduire de la question précédente les interactions à prendre en compte et les modéliser.

▶ **Réponse.**

Étude des interactions :

- Système – Terre : on la modélise par le poids $\vec{P}$.
- Système – Air : on la néglige dans cette étude.

Remarque. La balle est un objet dense et peu volumineux, l'interaction avec l'air peut être négligée.

25) Schématiser la situation.

26) Écrire la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression du vecteur accélération du centre d'inertie de la balle.

▶ **Réponse.**

Deuxième loi de Newton :

$$m\,\vec{a}_G = \vec{P} = m\,\vec{g}$$

avec $\vec{a}$ l'accélération du système.

Finalement,

$$\vec{a}_G = \vec{g} \tag{7}$$

Le vecteur accélération est colinéaire et de même sens que le vecteur champ de pesanteur. **Le système est en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre**.

E.3 Détermination des équations horaires du mouvement

E.3.1 Projection de l'équation du mouvement

27) Établir, à partir de la relation (7), les expressions des composantes du vecteur accélération $\vec{a}_G$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

► **Réponse.**

La relation (7) est vectorielle, on choisit un repère afin de la transformer en système d'équations scalaires. À priori le mouvement peut s'effectuer selon les trois dimensions de l'espace, on choisit donc le repère cartésien $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Dans ce repère, $\vec{g}=-g\,\vec{k}$ que l'on peut écrire : $\vec{g}\begin{pmatrix}0\\0\\-g\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{a_G}=a_x\,\vec{i}+a_y\,\vec{j}+a_z\,\vec{k}$ que l'on peut écrire : $\overrightarrow{a_G}\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$.

Finalement, l'équation (7) s'écrit une fois projetée :

$$a_x = 0 \tag{8}$$
$$a_y = 0 \tag{9}$$
$$a_z = -g \tag{10}$$

28) Caractériser le mouvement.

► **Réponse.**

- Les relations (8) et (9) indiquent que selon les axes $(O\,x)$ et $(O\,y)$, *il n'y a pas de mouvement ou que ce mouvement est (rectiligne) uniforme.*
- La relation (10) indique que *le mouvement est uniformément accéléré selon l'axe* $(O\,z)$.

E.3.2 Détermination des composantes du vecteur vitesse

29) Établir, à partir des expressions des composantes du vecteur accélération, les composantes du vecteur vitesse du système en fonction du temps.

▶ **Réponse.**

Puisque l'accélération est le taux de variation instantanée de la vitesse,

$$\begin{aligned}
(8) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= 0 && (11)\\
(9) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= 0 && (12)\\
(10) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= -g && (13)
\end{aligned}$$

L'intégration de ces relations conduit aux familles de fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
(11) \Rightarrow v_x(t) &= A && (14)\\
(12) \Rightarrow v_y(t) &= B && (15)\\
(13) \Rightarrow v_z(t) &= -g\,t + C && (16)
\end{aligned}$$

Afin de déterminer les fonctions v_x, v_y et v_z *solutions du problème*, il est nécessaire (et suffisant) d'utiliser la *condition initiale sur la vitesse* :

$$\vec{v_0} \quad \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}
v_x(0) &= A = v_0 \cos\alpha\\
v_y(0) &= B = 0\\
v_z(0) &= -g \times 0 + C = v_0 \sin\alpha
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
v_x(t) &= v_0 \cos\alpha && (17)\\
v_y(t) &= 0 && (18)\\
v_z(t) &= -g\,t + v_0 \sin\alpha && (19)
\end{aligned}$$

30) Compléter la caractérisation du mouvement.

▶ **Réponse.**

– La relation (17) nous indique que le mouvement est uniforme selon l'axe $(O\,x)$.

– La relation (18) nous indique qu'il n'y a aucun mouvement selon l'axe $(O\,y)$. *Le mouvement s'inscrit donc dans le plan* $(x\,O\,z)$.

E.3.3 Détermination des coordonnées de la position

31) Établir, à partir des expressions des composantes du vecteur accélération, les composantes du vecteur position du système en fonction du temps.

▶ **Réponse.**

Puisque la vitesse est le taux de variation de la position,

$$(17) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\alpha \quad (20)$$
$$(18) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \quad (21)$$
$$(19) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -g\,t + v_0 \sin\alpha \quad (22)$$

L'intégration de ces relations conduit aux familles de fonctions suivantes :

$$(20) \Rightarrow x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t + D \quad (23)$$
$$(21) \Rightarrow y(t) = E \quad (24)$$
$$(22) \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t + F \quad (25)$$

Afin de déterminer les fonctions x, y et z *solutions du problème*, il est nécessaire (et suffisant) d'utiliser la **condition initiale sur la position** :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} x(0) &= v_0 \cos(\alpha) \times 0 + D = 0 \\ y(0) &= E = 0 \\ z(0) &= -\frac{1}{2}\, g \times 0^2 + v_0 \sin(\alpha) \times 0 + F = z_0 \end{aligned}$$

Finalement

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t \quad (26)$$
$$y(t) = 0 \quad (27)$$
$$z(t) = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t + z_0 \quad (28)$$

E.4 Utilisation des équations horaires

E.4.1 Détermination de la trajectoire de la balle

32) Déterminer l'équation de la trajectoire.

► **Réponse.**

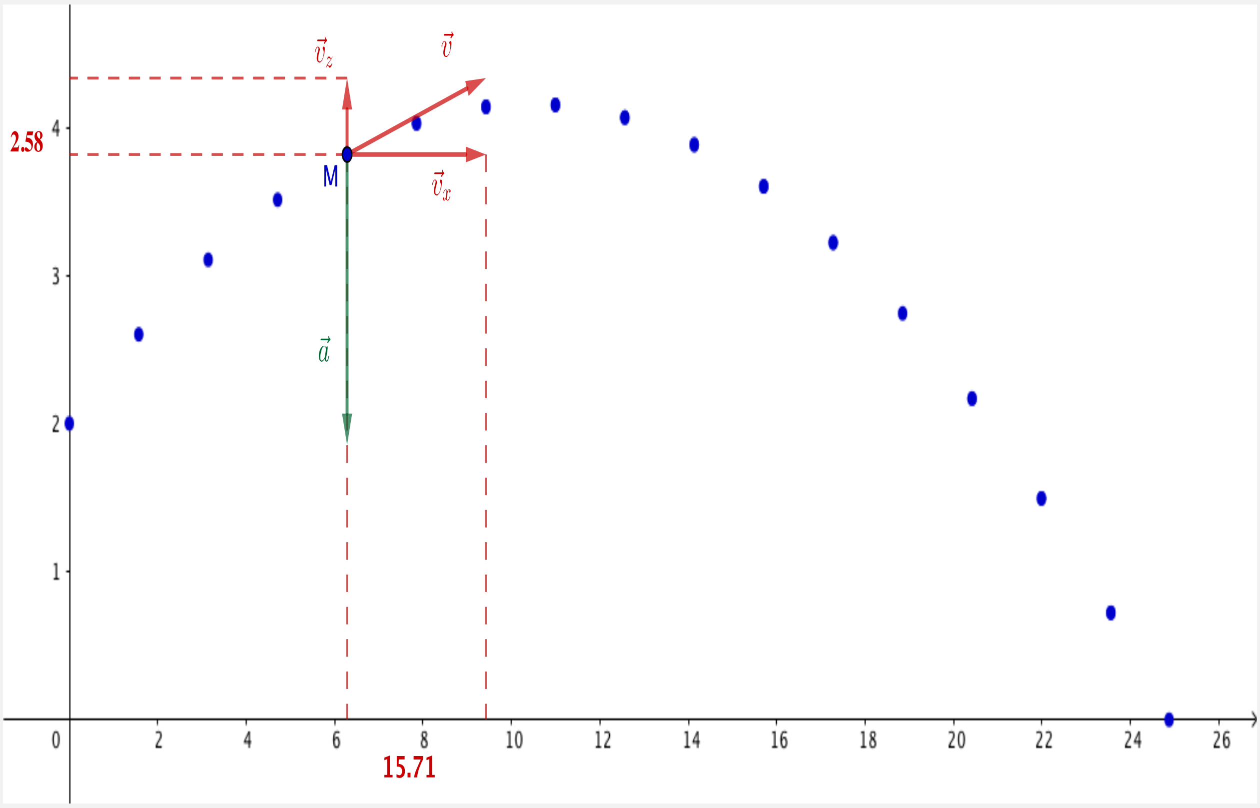
La détermination de la trajectoire nécessite d'établir la relation qui existe entre les *coordonnées d'espace*. Il faut donc éliminer le temps dans les relations (26) et (28).

$$(26) \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

En substituant le temps t dans la relation (28), on obtient

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos \alpha} + z_0 \\ &= -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + \tan(\alpha)\, x + z_0 \end{aligned} \tag{29}$$

Le mouvement de la balle est *parabolique*.



E.4.2 Détermination de la position de la flèche

La flèche est le point de la trajectoire de coordonnées (x_F, z_{max}).

33) Déterminer les caractéristiques de la flèche.

▶ **Réponse.**

Le raisonnement est identique à celui mis en œuvre dans la section C.4.1 : la balle se trouve à sa position d'altitude maximale lorsque *la composante verticale de sa vitesse est nulle*. Donc

$$v_z(t_F) = 0 = -g\,t_F + v_0 \sin\alpha$$

soit

$$t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

et comme

$$z_{\text{max}} = z(t_F) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha\,\frac{v_0 \sin\alpha}{g} + z_0$$

alors

$$z_{\text{max}} = \frac{1}{2}\frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g} + z_0$$

De même,

$$x_F = x(t_F) = v_0 \cos\alpha\,\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

ou

$$x_F = \frac{v_0^2 \sin(2\,\alpha)}{2\,g}$$

E.4.3 Détermination de la portée

La portée est la distance x_p à parcourir selon l'axe $(O\,x)$ afin que l'altitude soit nulle.

34) Déterminer les caractéristiques de la portée.

► **Réponse.**

Deux raisonnements sont possibles :

À partir de la trajectoire. x_p est la racine positive de l'équation

$$0 = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x_p}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + \tan(\alpha)\, x_p + z_0$$

À partir des équations horaires. Comme toujours à partir des équations horaires, il est nécessaire de déterminer la date à laquelle l'évènement étudié a lieu.

a. Soit t_p la date à laquelle le système touche le sol. t_p est la racine positive de l'équation

$$0 = -\frac{1}{2}\, g\, t_p^2 + v_0 \sin(\alpha)\, t_p + z_0$$

b. On peut alors déterminer x_p puisque

$$x_p = x(t_p) = v_0 \cos(\alpha)\, t_p$$