Mouvements dans le champ gravitationnel non uniforme

Doc. 8,6

§1. Objectif

Le but de ce document est d'abord de présenter les trois lois phénoménologiques de Kepler, pour ensuite démontrer la troisième loi dans le cas spécifique du mouvement circulaire d'un satellite.

§2. Les lois de Kepler

§2.1. Présentation des lois

À la suite d'un dépouillement méticuleux des observations faites pendant de nombreuses années par l'astronome danois Ticho Brahe (1546-1601), Kepler (1571-1630) a établi trois lois *empiriques* décrivant les mouvements des planètes[1].
Les deux premières lois furent publiées par Kepler en 1609 et la troisième en 1619. Les lois de Kepler conduisirent Newton à la découverte de la loi de la gravitation universelle.

! À retenir

Loi des trajectoires : *Chaque planète décrit autour du Soleil une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.*
Loi des aires : *Le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète balaie des surfaces égales pendant des durées égales.*
Loi des périodes : *Les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes de leurs orbites :*

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$$

i Info

*Une **ellipse** est le lieu des points P du plan vérifiant : $F_1P + F_2P = 2a$ où F_1 et F_2 sont deux points fixes appelés « foyers de l'ellipse » et a est un réel strictement positif appelé « demi-grand axe de l'ellipse ».*

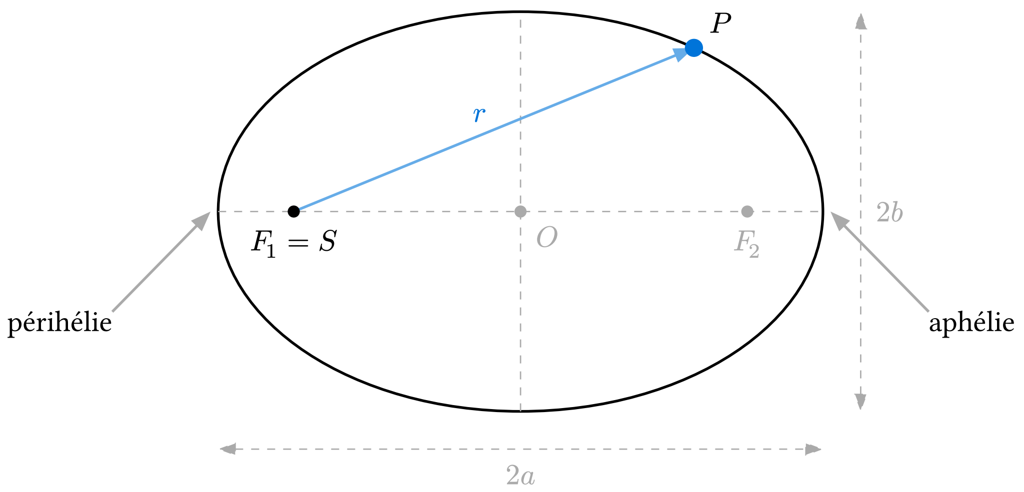

Fig. 1. – *Chaque planète décrit autour du Soleil une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

[1] Ces lois sont donc de nature très différente des lois de Newton : *elles n'expliquent pas le mouvement mais le décrivent.* Ceci dit, il faut garder à l'esprit qu'avant le travail titanesque de Kepler personne ne savait prédire la position des astres errants avec une grande précision.

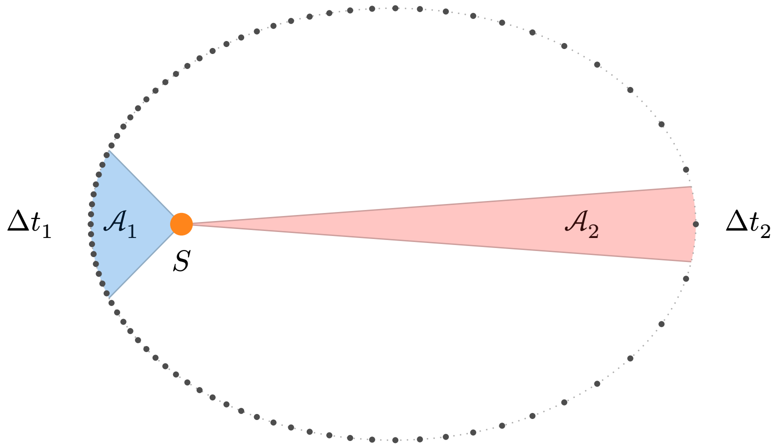

Fig. 2. – *Le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète balaie des surfaces égales pendant des durées égales. Si $\Delta t_1 = \Delta t_2$, alors $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.*

Planète	**Demi-grand axe (10^{10} m)**	**Période (ans)**	**T^2/a^3 (10^{-34}ans$^2 \cdot$ m^{-3})**	**Carré de la période (ans^2)**	**Cube du demi grand axe (10^{30} m)**
Mercure	5,79	0,24	2,99	0,06	194,10
Vénus	10,80	0,62	3,00	0,38	1259,71
Terre	15,00	1,00	2,96	1,00	3375,00
Mars	22,80	1,88	2,98	3,53	11852,35
Jupiter	77,80	11,90	3,01	141,61	470910,95
Saturne	143,00	29,50	2,98	870,25	2924207,00
Uranus	287,00	84,00	2,98	7056,00	23639903,00
Neptune	450,00	165,00	2,99	27225,00	91125000,00
Pluton	590,00	248,00	2,99	61504,00	205379000,00

Tableau 1. – *Données du système solaire.*

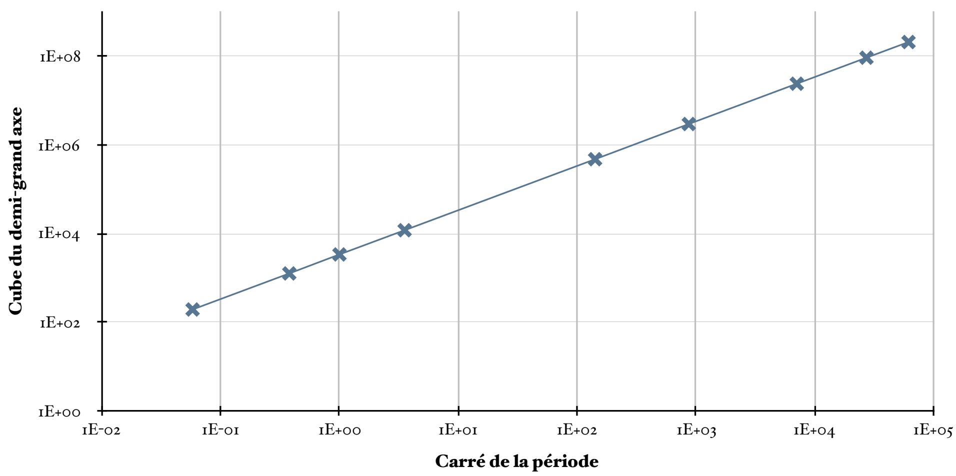

Fig. 3. – *Les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes de leurs orbites.*

§2.2. Que nous apprennent les lois de Kepler ?

§2.2.1. Loi des trajectoires

— Le mouvement des planètes est plan.
— Le mouvement des planètes n'est pas toujours circulaire (même si, en pratique l'excentricité des différentes trajectoires peut être petite). Cette découverte fut importante à une époque où la figure géométrique parfaite restait le cercle.
— Cette loi apporte un crédit considérable au système de Copernic.

> ⚠ **Avertissement**
>
> La première loi de Kepler n'est pas généralisable à tous les mouvements dans l'espace : certains astres possèdent des mouvements *paraboliques* ou *hyperboliques*.

§2.2.2. Loi des aires

— La vitesse d'une planète sur une trajectoire elliptique autour du Soleil n'est pas uniforme : sa valeur est *maximale au périhélie* et *minimale à l'aphélie* ;
— *La vitesse d'une planète sur une trajectoire circulaire est uniforme.*

> *i* **Info**
>
> On peut montrer que les première et deuxième lois de Kepler imposent à la *force gravitationnelle d'être centripète* (dirigée vers le Soleil).

§2.2.3. Loi des périodes

— Cette loi relie entre-elles toutes les planètes du système solaire. Elle montre que *la durée de révolution autour du Soleil est d'autant plus grande que l'orbite de la planète est éloignée du Soleil.*
— On peut montrer que cette loi constitue un **critère d'appartenance d'un astre au système solaire** : tous les membres du système solaire sans exception, quelle que soit leur trajectoire, valident cette loi.

> *i* **Info**
>
> On peut montrer que la troisième loi de Kepler impose à la valeur de la force gravitationnelle d'être en $1/r^2$, c'est-à-dire de diminuer avec le carré de la distance au Soleil.

§3. Champ gravitationnel

§3.1. Force gravitationnelle

> ! **À retenir**
>
> Deux **corps ponctuels** de masses m_1 et m_2 sont situés en deux points M_1 et M_2 de l'espace éloignés d'une distance d.
> On modélise l'action qu'exerce le corps de masse m_1 sur le corps de masse m_2 par la force gravitationnelle introduite par Newton :

$$\vec{F}_{m_1/m_2} = \begin{cases} \text{Point d'application : } M_2 \\ \text{Direction : droite } (M_1 M_2) \\ \text{Sens : vers } M_1 \\ \text{Valeur : } F_{m_1/m_2} = G\,\dfrac{m_1 m_2}{d^2} \end{cases}$$

où G est la **constante de gravitation universelle** : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

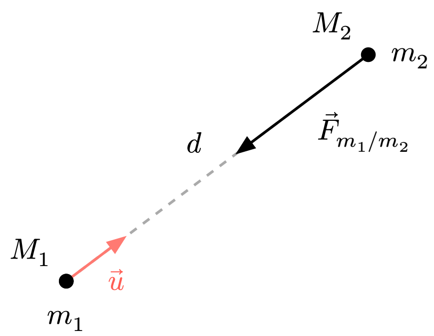

Fig. 4. – *Schématisation de la force gravitationnelle*

Q1. À partir des informations données ci-dessus, donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}$.

Info

- La force gravitationnelle est toujours attractive !
- La force gravitationnelle introduite par Newton, pour les objets ponctuels, est généralisable à tous les objets à symétrie sphérique de masse.

À retenir : Principe des actions réciproques

$$\vec{F}_{m_1/m_2} = -\vec{F}_{m_2/m_1}$$

§3.2. Qu'appelle-t-on champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$?

- Si, au point M_2, on remplace le corps de masse m_2 par un corps de masse m_3, ce dernier est soumis à la force :

$$\vec{F}_{m_1/m_3} = -G\,\frac{m_1 m_3}{d^2}\,\vec{u}$$

- De même, si on remplace le corps de masse m_3 par un corps de masse m_4, ce dernier est soumis à la force :

$$\vec{F}_{m_1/m_4} = -G\,\frac{m_1 m_4}{d^2}\,\vec{u}$$

À retenir : Champ gravitationnel

On constate que, quelle que soit la masse m qui subit l'action de la masse m_1 :

$$\frac{\vec{F}_{m_1/m_2}}{m_2} = \frac{\vec{F}_{m_1/m_3}}{m_3} = \frac{\vec{F}_{m_1/m_4}}{m_4} = \ldots = -G\,\frac{m_1}{d^2}\,\vec{u} = \vec{\mathcal{G}}(M_2)$$

$\vec{\mathcal{G}}(M_2)$, champ gravitationnel au point M_2 créé par la masse **ponctuelle** m_1, représente **la force gravitationnelle que subirait un point ponctuel de masse $m = 1$ kg placé en M_2 de la part du point de masse M_1**.

Remarque : L'expression du champ gravitationnel reste valable si le corps n'est pas ponctuel mais est à symétrie de masse sphérique.

! À retenir : Relation entre la force gravitationnelle et le champ gravitationnel en un point

La présence de la masse m_1 au point M_1 « communique » à tout point de l'espace la propriété suivante : « Toute masse m placée en un point M quelconque de l'espace est soumise à la force :

$$\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}(M)$$

où $\vec{\mathcal{G}}(M)$ est le champ gravitationnel créé par la masse m_1 au point M.

En un point de l'espace les champs électriques créés par différentes charges s'additionnent.

⚠ Avertissement

Le champ gravitationnel est non uniforme.

§3.3. Quel est le lien entre le champ de pesanteur $\vec{g}$ et le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$?

Le **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}$ est un champ fondamental : *il décrit l'action gravitationnelle exercée par une masse, comme la Terre, sur les objets qui l'entourent.* Il est défini indépendamment du référentiel terrestre.

Le **champ de pesanteur**, noté $\vec{g}$, correspond à *l'accélération observée pour un objet soumis uniquement à la pesanteur dans le référentiel terrestre.*

Comme le référentiel terrestre n'est, en fait, pas galiléen, puisque la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil, l'accélération mesurée dans le référentiel terrestre comprend deux contributions : l'effet de la gravitation terrestre et un effet lié à la rotation de la Terre. **Dans le programme de terminale, on néglige l'effet lié au mouvement de la Terre.**

! À retenir

En première approximation, on assimile le champ de pesanteur $\vec{g}$ au champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ dans le référentiel terrestre. *Lors de la résolution d'un problème, il faut donc utiliser l'un des deux champs mais jamais les deux en même temps !*

§4. Étude du mouvement d'une planète autour du Soleil

§4.1. Détermination de l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ de la planète

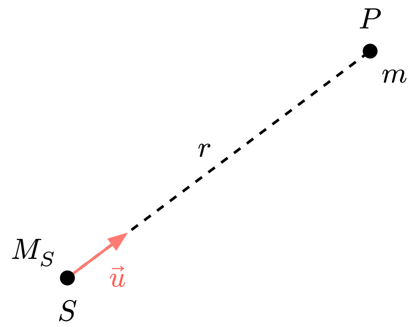

Fig. 5. – *Schématisation de la situation physique*

Une planète P gravite autour du Soleil S. On étudie le mouvement de cette planète.

Q2. Définir le système étudié.

Q3. Définir le référentiel d'étude du mouvement.

Q4. Déduire des questions précédentes les interactions à prendre en compte et les modéliser.

Q5. Schématiser la situation.

Q6. Écrire la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression vectorielle du vecteur accélération $\vec{a}_P$ de la planète.

Q7. Qualifier le mouvement de la planète.

Q8. Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}$, cf. Fig. 5, et des paramètres du problème.

> **! À retenir**
>
> *Le vecteur accélération $\vec{a}_P$ d'une planète autour du Soleil **ne peut jamais être considéré uniforme** pour la totalité de son mouvement.*

Quels sont les mouvement possibles avec une telle accélération ?

On peut démontrer qu'une telle accélération conduit à des mouvements circulaires (Fig. 8), elliptiques (Fig. 9), paraboliques (Fig. 10) ou hyperboliques (Fig. 11).

> **⚠ Avertissement**
>
> *Vos connaissances en mathématique ne vous permettent pas de déterminer le vecteur vitesse par intégration directe de l'accélération puisque cette dernière n'est pas un vecteur constant !* Il faudra apprendre et utiliser le résultat donné dans la section qui suit.

§4.2. Détermination de l'expression du vecteur vitesse de la planète dans le cas d'un mouvement circulaire

> **⚠ Avertissement**
>
> *Dans la suite de ce chapitre nous allons nous limiter aux mouvements circulaires, c'est à dire aux mouvements dont la trajectoire est un cercle.*

Remarque : Le centre de la trajectoire d'une planète en orbite circulaire est confondu avec le centre du Soleil.

§4.2.1. Repère de Frenet dans le cas d'un mouvement circulaire

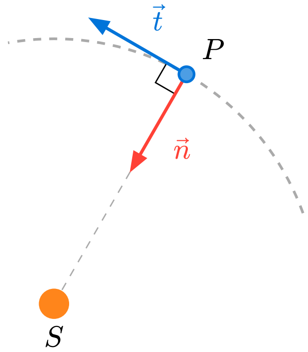

Fig. 6. – Schéma du repère mobile de Frenet.

! À retenir

Le **repère de Frenet** est un **repère mobile**, dont l'**origine** est le point P étudié, et la base est constituée des vecteurs unitaires $\vec{t}$ et $\vec{n}$ dans le plan (si on se limite à un problème à deux dimensions comme dans ce chapitre).

— Le vecteur unitaire $\vec{t}$ a pour direction la droite tangente à la trajectoire au point P et pour sens le sens du mouvement ;

— Le vecteur unitaire $\vec{n}$ a pour direction la droite normale à la droite tangente au point P (c'est donc la direction du rayon de la trajectoire dans le cas d'un cercle) et est dirigé vers le centre de la courbure.

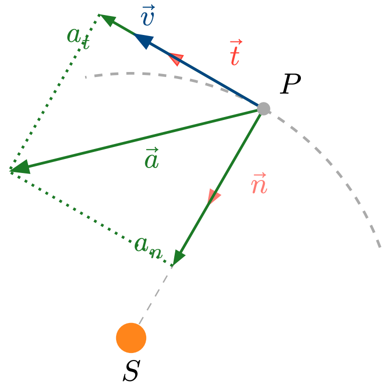

Fig. 7. – Schéma du repère mobile de Frenet.

! À retenir

Dans le repère de Frenet, lorsque la trajectoire est un cercle,

— La vitesse d'une planète s'écrit :

$$\vec{v} = v\,\vec{t}$$

— *On peut démontrer que* l'accélération d'une planète s'écrit :

$$\vec{a}_P = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{t} + \frac{v^2}{r}\,\vec{n}$$

où r est le rayon du cercle.

> **Avertissement**
>
> L'expression de l'accélération doit être admise et apprise, en notant bien que c'est la **valeur de la vitesse** $\vec{v}$ qui intervient dans la dérivée par rapport au temps.

§4.2.2. Expression de la vitesse $\vec{v}_P$ de la planète

Q9. Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{n}$ du repère de Frenet.

Q10. Projeter l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ dans le repère de Frenet, *pour un mouvement circulaire.*

Q11. Démontrer que si la trajectoire est un cercle, *le mouvement est forcément uniforme.*

Q12. Donner l'expression de la valeur v_P de la vitesse de la planète en fonction des paramètres du problème.

§5. Période de révolution de la planète, troisième loi de Kepler

§5.1. La troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire et uniforme

Q13. Rappeler ce qu'est la période de révolution T_P d'une planète autour du Soleil et donner son expression en fonction de la vitesse v_P de la planète sur son orbite et de la distance r de cette planète au Soleil, *dans le cas d'un mouvement circulaire.*

Q14. Donner l'expression de la période T_P en fonction de G, r et M_S.

Q15. À partir de l'expression de la période T_P retrouver la troisième loi de Kepler, *dans le cas d'un mouvement circulaire.*

§5.2. Satellites géostationnaires

Remarque : Dans cette partie, le corps attracteur est désormais la Terre et on considère le mouvement de ses satellites.

> **Caractéristiques d'un satellite géostationnaire**
>
> **Plan de la trajectoire.** La trajectoire d'un satellite « géostationnaire » est un *cercle situé dans le plan équatorial de la Terre* (plan contenant l'équateur). *La vitesse de rotation autour de l'axe des pôles est égale à celle de la Terre ; le satellite apparaît immobile à un observateur terrestre.*
>
> **Période de révolution.** La période de révolution d'un satellite « géostationnaire », *dans le référentiel géocentrique*, est égale à la période de rotation propre de la Terre :
>
> $$T = 86164\,\mathrm{s}\ \text{(jour sidéral)}$$

Q16. Démontrer que les satellites géostationnaires ne peuvent se trouver qu'à une altitude h bien définie, au dessus du niveau du sol.

> **Info**
>
> Dans le référentiel géocentrique, tous les satellites « géostationnaires » évoluent sur une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial, à une altitude $h = 35800\,\mathrm{km}$ environ. Leur période de révolution est égale à un jour sidéral : $T = 86164\,\mathrm{s}$.

§6. Applications

Exercice 1

Dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen, la Terre décrit autour du Soleil une trajectoire pratiquement circulaire de rayon $R_T = 1\,\mathrm{ua} = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$. La période de ce mouvement est $T_T = 365{,}25\,\mathrm{j}$.

La planète Vénus décrit, également dans ce même référentiel, une trajectoire que l'on supposera circulaire. Sa période de révolution est $T_V = 1{,}94 \times 10^7$ s.

Q17. Déterminer la valeur du rayon de la trajectoire de la planète Vénus autour du Soleil.

Exercice 2

Un satellite est placé sur une orbite circulaire de rayon $R = 20000$ km, située dans le plan équatorial de la Terre. Il se déplace d'Ouest en Est.

Dans le repère géocentrique supposé galiléen, la période de révolution du satellite est $T = 7{,}82$ h.

Donnée : constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Q18. En déduire la valeur de la masse de la Terre.

Exercice 3

Le satellite **Explorer 3** avait une trajectoire circulaire. Il évoluait à une altitude $h = 180 \times 10^3$ m au-dessus de la surface de la Terre.

Données : $g_0(\text{au sol}) = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $R_T = 6376$ km.

Q19. Calculer la période de révolution du satellite.

Q20. Calculer la vitesse du satellite.

Exercice 4

En octobre 1957, le premier satellite spoutnik 1 avait une période de révolution de 96 min.

Données : $g_0(\text{au sol}) = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $R_T = 6376$ km.

Q21. En admettant que sa trajectoire était circulaire, déterminer l'altitude de ce satellite.

Q22. Calculer la vitesse du satellite.

Exercice 5

Un satellite a une orbite circulaire de rayon $r = 18000$ km située dans le plan équatorial terrestre. Il se déplace vers l'Est. La période de rotation de la Terre est de $T = 86164$ s.

Données : $g_0(\text{au sol}) = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $R_T = 6376$ km.

Q23. Calculer la période du satellite dans le référentiel géocentrique.

Q24. Calculer sa vitesse et son accélération par rapport au référentiel géocentrique.

§7. Les trajectoires possibles d'un système soumis à la gravitation

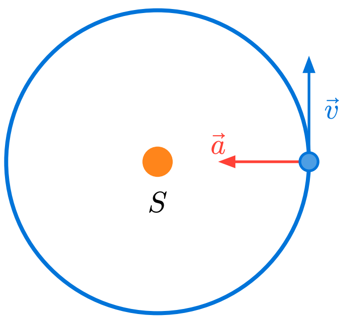

Fig. 8. – *Trajectoire :* **cercle**
(orbite fermée stable, la vitesse est inférieure à la vitesse de libération).

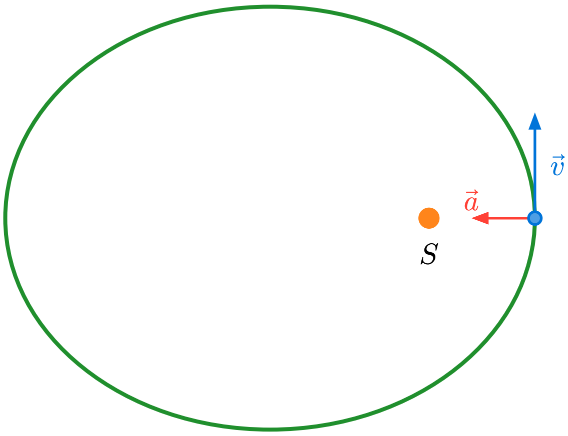

Fig. 9. – *Trajectoire :* **ellipse**
(orbite fermée stable, la vitesse est inférieure à la vitesse de libération).

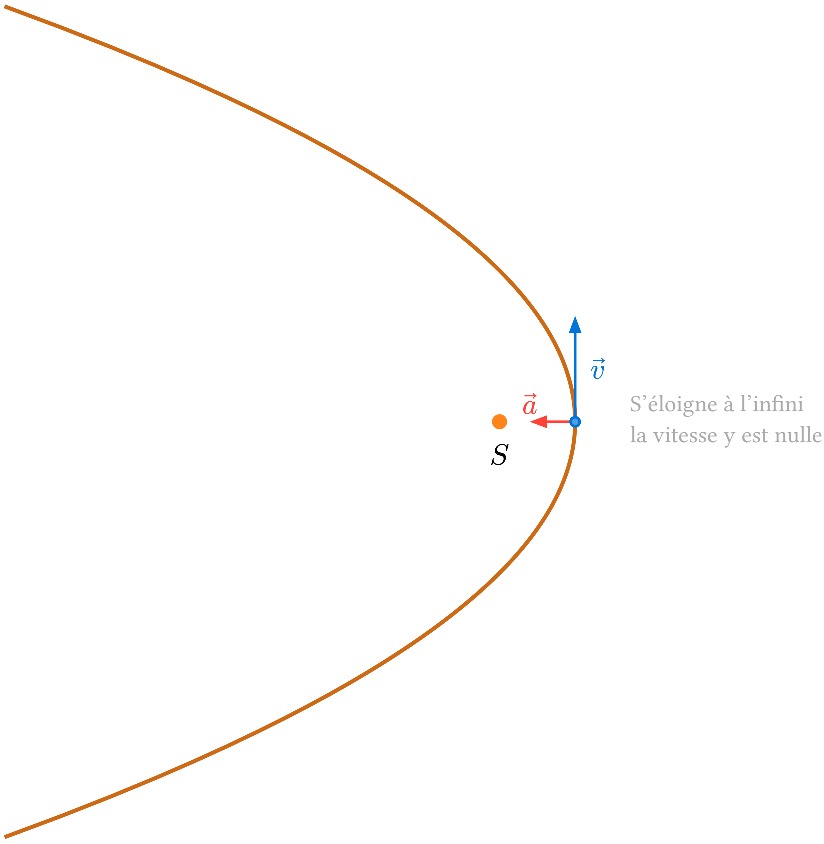

Fig. 10. – *Trajectoire :* **parabole**
(orbite ouverte, la vitesse est égale à la vitesse de libération).

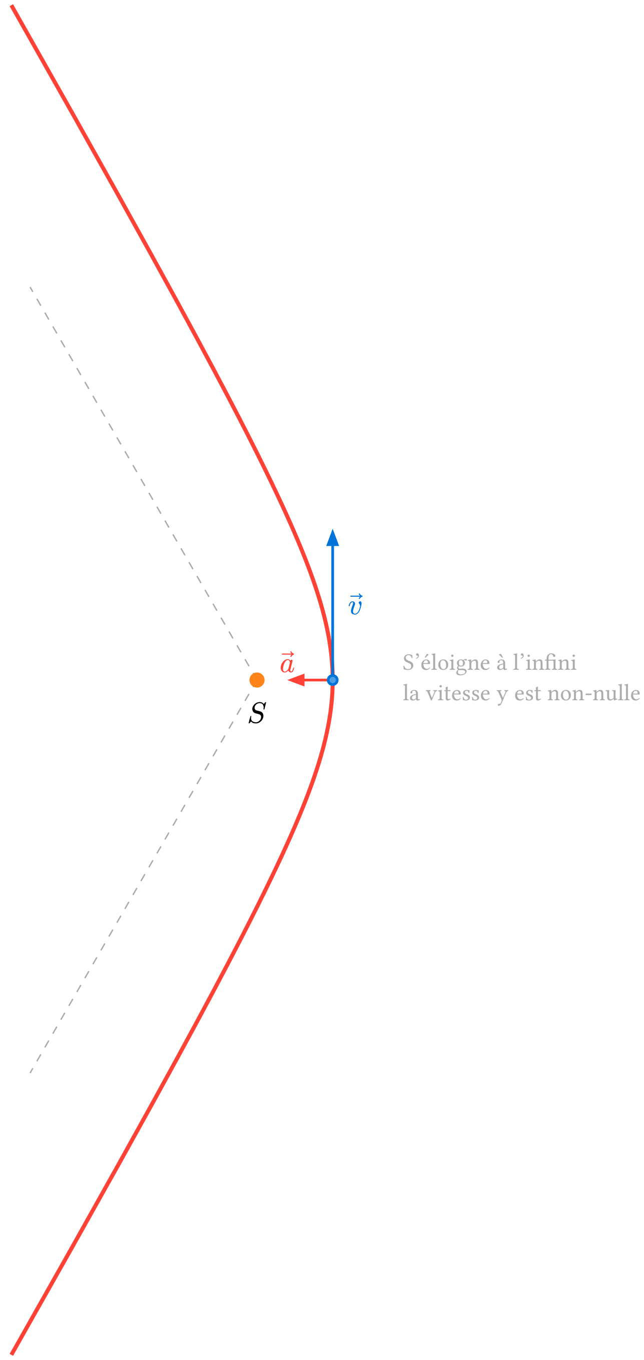

Fig. 11. – *Trajectoire :* **hyperbole**
(orbite ouverte, la vitesse est supérieure à la vitesse de libération).