# Mouvements dans le champ gravitationnel non uniforme

**Doc. 8,6**

## §1. Objectif

Le but de ce document est d'abord de présenter les trois lois phénoménologiques de Kepler, pour ensuite démontrer la troisième loi dans le cas spécifique du mouvement circulaire d'un satellite.

## §2. Les lois de Kepler

### §2.1. Présentation des lois

À la suite d'un dépouillement méticuleux des observations faites pendant de nombreuses années par l'astronome danois Ticho Brahe (1546-1601), Kepler (1571-1630) a établi trois lois *empiriques* décrivant les mouvements des planètes[1].
Les deux premières lois furent publiées par Kepler en 1609 et la troisième en 1619. Les lois de Kepler conduisirent Newton à la découverte de la loi de la gravitation universelle.

**! À retenir**

**Loi des trajectoires** : *Chaque planète décrit autour du Soleil une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.*
**Loi des aires** : *Le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète balaie des surfaces égales pendant des durées égales.*
**Loi des périodes** : *Les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes de leurs orbites :*

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cste}$$

***i* Info**

*Une **ellipse** est le lieu des points $P$ du plan vérifiant : $F_1P + F_2P = 2a$ où $F_1$ et $F_2$ sont deux points fixes appelés « foyers de l'ellipse » et $a$ est un réel strictement positif appelé « demi-grand axe de l'ellipse ».*

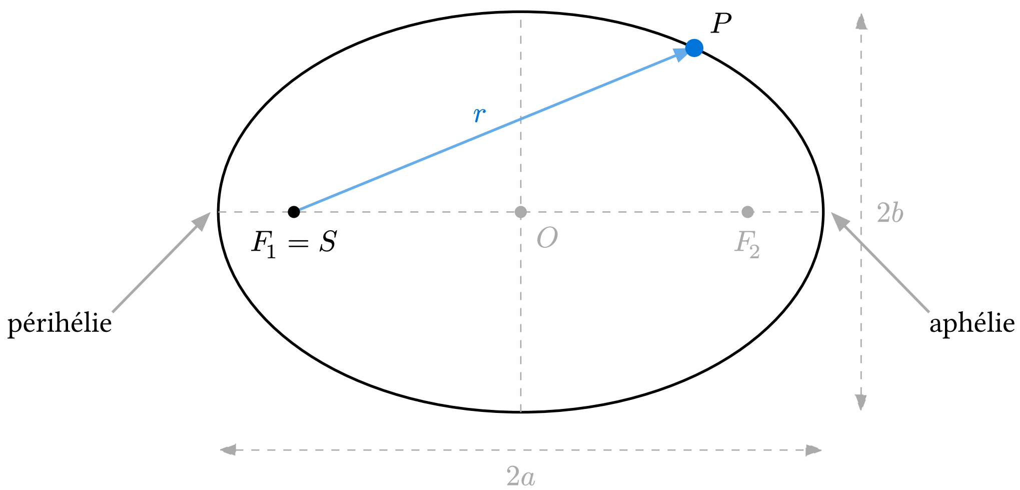



Fig. 1. – *Chaque planète décrit autour du Soleil une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.*

[1] Ces lois sont donc de nature très différente des lois de Newton : *elles n'expliquent pas le mouvement mais le décrivent.* Ceci dit, il faut garder à l'esprit qu'avant le travail titanesque de Kepler personne ne savait prédire la position des astres errants avec une grande précision.

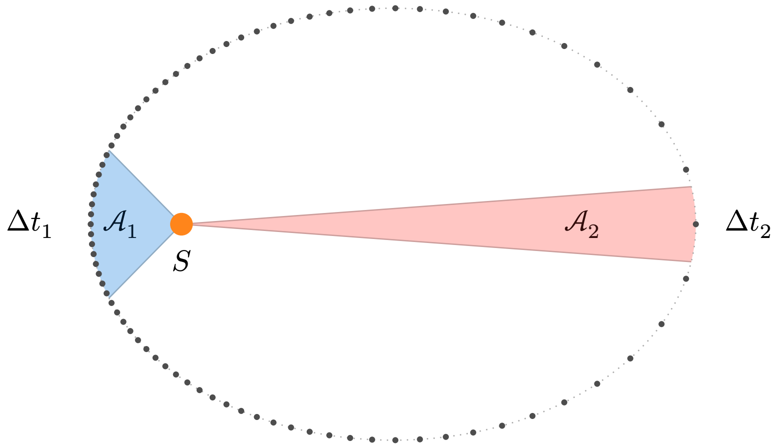



Fig. 2. – *Le rayon vecteur joignant le Soleil à la planète balaie des surfaces égales pendant des durées égales. Si $\Delta t_1 = \Delta t_2$, alors $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.*

| **Planète** | **Demi-grand axe ($10^{10}$ m)** | **Période (ans)** | **$T^2/a^3$ ($10^{-34}\text{ans}^2 \cdot \text{m}^{-3}$)** | **Carré de la période ($\text{ans}^2$)** | **Cube du demi grand axe ($10^{30}$ m)** |
|---|---|---|---|---|---|
| Mercure | 5,79 | 0,24 | 2,99 | 0,06 | 194,10 |
| Vénus | 10,80 | 0,62 | 3,00 | 0,38 | 1259,71 |
| Terre | 15,00 | 1,00 | 2,96 | 1,00 | 3375,00 |
| Mars | 22,80 | 1,88 | 2,98 | 3,53 | 11852,35 |
| Jupiter | 77,80 | 11,90 | 3,01 | 141,61 | 470910,95 |
| Saturne | 143,00 | 29,50 | 2,98 | 870,25 | 2924207,00 |
| Uranus | 287,00 | 84,00 | 2,98 | 7056,00 | 23639903,00 |
| Neptune | 450,00 | 165,00 | 2,99 | 27225,00 | 91125000,00 |
| Pluton | 590,00 | 248,00 | 2,99 | 61504,00 | 205379000,00 |

Tableau 1. – *Données du système solaire.*

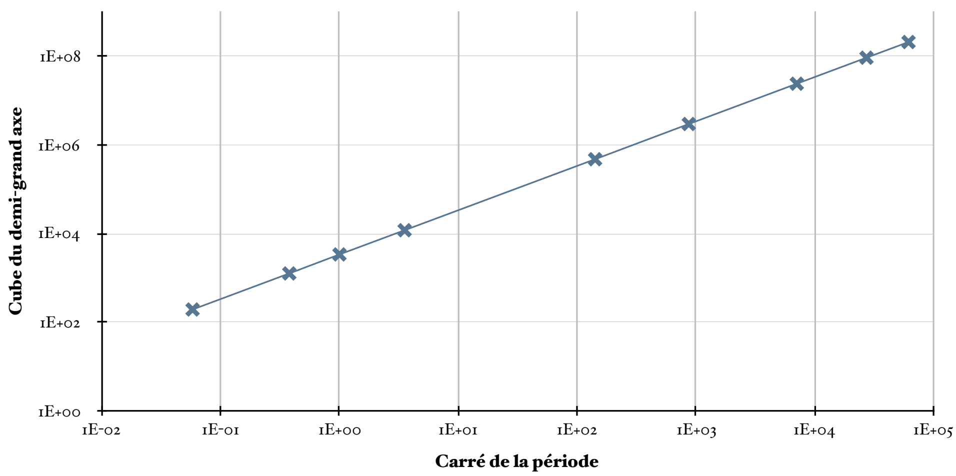



Fig. 3. – *Les carrés des périodes de révolution des planètes sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes de leurs orbites.*

### §2.2. Que nous apprennent les lois de Kepler ?

#### §2.2.1. Loi des trajectoires

— Le mouvement des planètes est plan.
— Le mouvement des planètes n'est pas toujours circulaire (même si, en pratique l'excentricité des différentes trajectoires peut être petite). Cette découverte fut importante à une époque où la figure géométrique parfaite restait le cercle.
— Cette loi apporte un crédit considérable au système de Copernic.

> **Avertissement**
>
> La première loi de Kepler n'est pas généralisable à tous les mouvements dans l'espace : certains astres possèdent des mouvements *paraboliques* ou *hyperboliques*.

#### §2.2.2. Loi des aires

— La vitesse d'une planète sur une trajectoire elliptique autour du Soleil n'est pas uniforme : sa valeur est *maximale au périhélie* et *minimale à l'aphélie* ;
— *La vitesse d'une planète sur une trajectoire circulaire est uniforme.*

> **Info**
>
> On peut montrer que les première et deuxième lois de Kepler imposent à la *force gravitationnelle d'être centripète* (dirigée vers le Soleil).

#### §2.2.3. Loi des périodes

— Cette loi relie entre-elles toutes les planètes du système solaire. Elle montre que *la durée de révolution autour du Soleil est d'autant plus grande que l'orbite de la planète est éloignée du Soleil.*
— On peut montrer que cette loi constitue un **critère d'appartenance d'un astre au système solaire** : tous les membres du système solaire sans exception, quelle que soit leur trajectoire, valident cette loi.

> **Info**
>
> On peut montrer que la troisième loi de Kepler impose à la valeur de la force gravitationnelle d'être en $1/r^2$, c'est-à-dire de diminuer avec le carré de la distance au Soleil.

## §3. Champ gravitationnel

### §3.1. Force gravitationnelle

> **À retenir**
>
> Deux **corps ponctuels** de masses $m_1$ et $m_2$ sont situés en deux points $M_1$ et $M_2$ de l'espace éloignés d'une distance $d$.
> On modélise l'action qu'exerce le corps de masse $m_1$ sur le corps de masse $m_2$ par la force gravitationnelle introduite par Newton :

$$\vec{F}_{m_1/m_2} = \begin{cases} \text{Point d'application : } M_2 \\ \text{Direction : droite } (M_1M_2) \\ \text{Sens : vers } M_1 \\ \text{Valeur : } F_{m_1/m_2} = G\,\dfrac{m_1 m_2}{d^2} \end{cases}$$

où $G$ est la **constante de gravitation universelle** : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

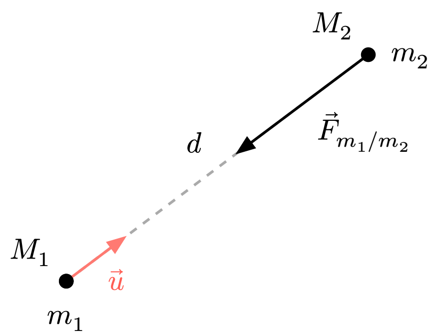



Fig. 4. – *Schématisation de la force gravitationnelle*

**Q1.** À partir des informations données ci-dessus, donner l'expression vectorielle de la force gravitationnelle en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}$.

**Réponse :**

$$\vec{F}_{m_1/m_2} = -G\,\frac{m_1 m_2}{d^2}\,\vec{u}$$

**Info**

- La force gravitationnelle est toujours attractive !
- La force gravitationnelle introduite par Newton, pour les objets ponctuels, est généralisable à tous les objets à symétrie sphérique de masse.

**À retenir : Principe des actions réciproques**

$$\vec{F}_{m_1/m_2} = -\vec{F}_{m_2/m_1}$$

## §3.2. Qu'appelle-t-on champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ ?

- Si, au point $M_2$, on remplace le corps de masse $m_2$ par un corps de masse $m_3$, ce dernier est soumis à la force :

$$\vec{F}_{m_1/m_3} = -G\,\frac{m_1 m_3}{d^2}\,\vec{u}$$

- De même, si on remplace le corps de masse $m_3$ par un corps de masse $m_4$, ce dernier est soumis à la force :

$$\vec{F}_{m_1/m_4} = -G\,\frac{m_1 m_4}{d^2}\,\vec{u}$$

**À retenir : Champ gravitationnel**

On constate que, quelle que soit la masse $m$ qui subit l'action de la masse $m_1$ :

$$\frac{\vec{F}_{m_1/m_2}}{m_2} = \frac{\vec{F}_{m_1/m_3}}{m_3} = \frac{\vec{F}_{m_1/m_4}}{m_4} = ... = -G\,\frac{m_1}{d^2}\,\vec{u} = \vec{\mathcal{G}}(M_2)$$

$\vec{\mathcal{G}}(M_2)$, champ gravitationnel au point $M_2$ créé par la masse **ponctuelle** $m_1$, représente **la force gravitationnelle que subirait un point ponctuel de masse $m = 1$ kg placé en $M_2$ de la part du point de masse $M_1$**.

**Remarque :** L'expression du champ gravitationnel reste valable si le corps n'est pas ponctuel mais est à symétrie de masse sphérique.

**À retenir : Relation entre la force gravitationnelle et le champ gravitationnel en un point**

La présence de la masse $m_1$ au point $M_1$ « communique » à tout point de l'espace la propriété suivante : « Toute masse $m$ placée en un point $M$ quelconque de l'espace est soumise à la force :

$$\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}(M)$$

où $\vec{\mathcal{G}}(M)$ est le champ gravitationnel créé par la masse $m_1$ au point $M$.

En un point de l'espace les champs électriques créés par différentes charges s'additionnent.

**Avertissement**

Le champ gravitationnel est non uniforme.

### §3.3. Quel est le lien entre le champ de pesanteur $\vec{g}$ et le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ ?

Le **champ gravitationnel** $\vec{\mathcal{G}}$ est un champ fondamental : *il décrit l'action gravitationnelle exercée par une masse, comme la Terre, sur les objets qui l'entourent.* Il est défini indépendamment du référentiel terrestre.

Le **champ de pesanteur**, noté $\vec{g}$, correspond à *l'accélération observée pour un objet soumis uniquement à la pesanteur dans le référentiel terrestre.*

Comme le référentiel terrestre n'est, en fait, pas galiléen, puisque la Terre tourne sur elle-même et autour du Soleil, l'accélération mesurée dans le référentiel terrestre comprend deux contributions : l'effet de la gravitation terrestre et un effet lié à la rotation de la Terre. **Dans le programme de terminale, on néglige l'effet lié au mouvement de la Terre.**

**À retenir**

En première approximation, on assimile le champ de pesanteur $\vec{g}$ au champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ dans le référentiel terrestre. *Lors de la résolution d'un problème, il faut donc utiliser l'un des deux champs mais jamais les deux en même temps !*

## §4. Étude du mouvement d'une planète autour du Soleil

### §4.1. Détermination de l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ de la planète

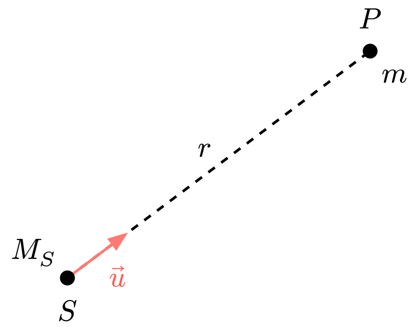



Fig. 5. – *Schématisation de la situation physique*

Une planète $P$ gravite autour du Soleil $S$. On étudie le mouvement de cette planète.

**Q2.** Définir le système étudié.

**Réponse :** Système = {Planète}.

**Q3.** Définir le référentiel d'étude du mouvement.

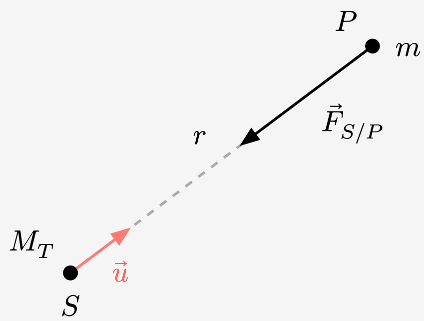
**Réponse :** Référentiel = {Astrocentrique}, c'est à dire géocentrique si $S$ est la Terre, héliocentrique si $S$ est le Soleil, etc.

**Q4.** Déduire des questions précédentes les interactions à prendre en compte et les modéliser.

**Réponse :** **Interaction :**
— Système - Champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ créé par l'astre $S$, modélisée par la force : $\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}(M)$.

**Q5.** Schématiser la situation.

**Réponse :**




**Q6.** Écrire la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression vectorielle du vecteur accélération $\vec{a}_P$ de la planète.

**Réponse :** Deuxième loi de Newton, lorsque la planète se trouve au point $M$ de l'espace :

$$m\vec{a}_P = \vec{F}_{S/P} = m\vec{\mathcal{G}}(M) \Longleftrightarrow \vec{a}_P = \vec{\mathcal{G}}(M)$$

L'accélération du centre d'inertie de la planète est *indépendante de la masse de cette planète*, elle ne dépend que de la valeur du champ gravitationnel à l'endroit où se trouve la planète.

**Remarque :** l'indépendance de l'accélération de la planète vis-à-vis de sa masse n'a rien d'évident ! À priori, la deuxième loi de Newton devrait s'écrire :

$$m_i \vec{a}_P = m_g \vec{\mathcal{G}}(M) \Longleftrightarrow \vec{a}_P = \frac{m_g}{m_i} \vec{\mathcal{G}}(M)$$

où $m_i$ est la *masse inertielle*, responsable de la différence d'accélération de systèmes de masses différentes pour une force donnée, et $m_g$ est la *masse gravitationnelle*, qui intervient dans l'intensité de l'interaction gravitationnelle. Dans le cadre de la mécanique newtonienne, cette égalité est constatée expérimentalement mais n'est pas expliquée. Ce n'est qu'avec la théorie de la relativité générale d'Einstein que cette égalité acquiert une signification plus profonde, à travers le *principe d'équivalence*.

**Q7.** Qualifier le mouvement de la planète.

**Réponse :** La planète est en chute libre sur le Soleil $S$.

**Q8.** Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}$, cf. Fig. 5, et des paramètres du problème.

**Réponse :**

$$\vec{a}_P = -G \frac{M_S}{r^2} \vec{u}$$

**! À retenir**

*Le vecteur accélération $\vec{a}_P$ d'une planète autour du Soleil* ***ne peut jamais être considéré uniforme*** *pour la totalité de son mouvement.*

**Quels sont les mouvement possibles avec une telle accélération ?**

On peut démontrer qu'une telle accélération conduit à des mouvements circulaires (Fig. 8), elliptiques (Fig. 9), paraboliques (Fig. 10) ou hyperboliques (Fig. 11).

**⚠ Avertissement**

*Vos connaissances en mathématique ne vous permettent pas de déterminer le vecteur vitesse par intégration directe de l'accélération puisque cette dernière n'est pas un vecteur constant !* Il faudra apprendre et utiliser le résultat donné dans la section qui suit.

## §4.2. Détermination de l'expression du vecteur vitesse de la planète dans le cas d'un mouvement circulaire

**⚠ Avertissement**

*Dans la suite de ce chapitre nous allons nous limiter aux mouvements circulaires, c'est à dire aux mouvements dont la trajectoire est un cercle.*

**Remarque :** Le centre de la trajectoire d'une planète en orbite circulaire est confondu avec le centre du Soleil.

### §4.2.1. Repère de Frenet dans le cas d'un mouvement circulaire

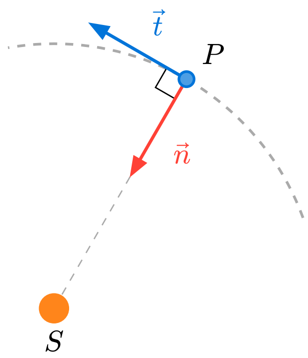



Fig. 6. – Schéma du repère mobile de Frenet.

**À retenir**

Le **repère de Frenet** est un **repère mobile**, dont l'**origine** est le point $P$ étudié, et la base est constituée des vecteurs unitaires $\vec{t}$ et $\vec{n}$ dans le plan (si on se limite à un problème à deux dimensions comme dans ce chapitre).

— Le vecteur unitaire $\vec{t}$ a pour direction la droite tangente à la trajectoire au point $P$ et pour sens le sens du mouvement ;

— Le vecteur unitaire $\vec{n}$ a pour direction la droite normale à la droite tangente au point $P$ (c'est donc la direction du rayon de la trajectoire dans le cas d'un cercle) et est dirigé vers le centre de la courbure.

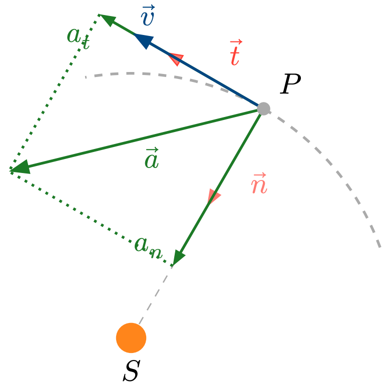



Fig. 7. – Schéma du repère mobile de Frenet.

**À retenir**

Dans le repère de Frenet, lorsque la trajectoire est un cercle,

— La vitesse d'une planète s'écrit :

$$\vec{v} = v\,\vec{t}$$

— *On peut démontrer que* l'accélération d'une planète s'écrit :

$$\vec{a}_P = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{t} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$$

où $r$ est le rayon du cercle.

> ⚠ **Avertissement**
>
> L'expression de l'accélération doit être admise et apprise, en notant bien que c'est la **valeur de la vitesse** $\vec{v}$ qui intervient dans la dérivée par rapport au temps.

#### §4.2.2. Expression de la vitesse $\vec{v}_P$ de la planète

**Q9.** Déterminer l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{n}$ du repère de Frenet.

**Réponse :** On remarque que $\vec{u} = -\vec{n}$, on peut donc écrire que :

$$\vec{a}_P = -G\,\frac{M_S}{r^2}\,\vec{u} = G\,\frac{M_S}{r^2}\,\vec{n}$$

**Q10.** Projeter l'expression du vecteur accélération $\vec{a}_P$ dans le repère de Frenet, *pour un mouvement circulaire.*

**Réponse :** On possède désormais deux expressions différentes de l'accélération :

$$\begin{cases} \text{Loi de Newton : } \vec{a}_P = G\,\dfrac{M_S}{r^2}\,\vec{n} \\ \text{Cinématique : } \quad \vec{a}_P = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\vec{t} + \dfrac{v^2}{r}\,\vec{n} \end{cases}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \text{selon la direction tangentielle : } \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \text{selon la direction normale : } \quad \dfrac{v^2}{r} = G\,\frac{M_S}{r^2} \end{cases}$$

**Q11.** Démontrer que si la trajectoire est un cercle, *le mouvement est forcément uniforme.*

**Réponse :** La projection sur la direction du vecteur $\vec{t}$ donne :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \iff v = \text{cste}$$

*Si le mouvement d'une planète est* ***circulaire****, alors il est* ***uniforme****.*

**Q12.** Donner l'expression de la valeur $v_P$ de la vitesse de la planète en fonction des paramètres du problème.

**Réponse :** La projection sur la direction du vecteur $\vec{n}$ donne :

$$v = \sqrt{G\frac{M_S}{r}}$$

La vitesse d'une planète est indépendante de sa masse, est d'autant plus petite que le rayon de son orbite est grand, et dépend de la masse du corps attracteur $M_S$.

## §5. Période de révolution de la planète, troisième loi de Kepler

### §5.1. La troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire et uniforme

**Q13.** Rappeler ce qu'est la période de révolution $T_P$ d'une planète autour du Soleil et donner son expression en fonction de la vitesse $v_P$ de la planète sur son orbite et de la distance $r$ de cette planète au Soleil, *dans le cas d'un mouvement circulaire.*

**Réponse :** La période de révolution $T$ de la planète autour de l'astre attracteur $S$ est la durée nécessaire pour parcourir l'orbite circulaire de rayon $r$ à la vitesse constante $v$, donc :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

**Q14.** Donner l'expression de la période $T_P$ en fonction de $G$, $r$ et $M_S$.

**Réponse :** Puisque $v = \sqrt{G\frac{M_S}{r}}$,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{G\frac{M_S}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_S}}$$

**Q15.** À partir de l'expression de la période $T_P$ retrouver la troisième loi de Kepler, *dans le cas d'un mouvement circulaire.*

**Réponse :** On préfère généralement écrire cette expression sous la forme :

$$T^2 = 4\pi^2\frac{r^3}{GM_S} \quad \text{ou} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

On retrouve la troisième loi de Kepler et on comprend pourquoi elle peut servir comme « test d'appartenance de la planète au système Solaire » : *le rapport est constant pour tous les satellites qui ont pour corps attracteur le corps de masse $M_S$.*

## §5.2. Satellites géostationnaires

**Remarque :** Dans cette partie, le corps attracteur est désormais la Terre et on considère le mouvement de ses satellites.

***i*** **Caractéristiques d'un satellite géostationnaire**

**Plan de la trajectoire.** La trajectoire d'un satellite « géostationnaire » est un *cercle situé dans le plan équatorial de la Terre* (plan contenant l'équateur). *La vitesse de rotation autour de l'axe des pôles est égale à celle de la Terre ; le satellite apparaît immobile à un observateur terrestre.*

**Période de révolution.** La période de révolution d'un satellite « géostationnaire », *dans le référentiel géocentrique*, est égale à la période de rotation propre de la Terre :

$$T = 86164\,\text{s (jour sidéral)}$$

**Q16.** Démontrer que les satellites géostationnaires ne peuvent se trouver qu'à une altitude $h$ bien définie, au dessus du niveau du sol.

**Réponse :** On peut écrire : $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^3$ puisque la distance entre le centre de la Terre et le satellite est : $r = R_T + h$. Donc :

$$h = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R_T$$

**A.N.** $h = \left(\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 86164^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 6,38 \cdot 10^6 = 3{,}58 \times 10^7\ \mathrm{m} = 3{,}58 \times 10^4\ \mathrm{km}.$

***i*** **Info**

Dans le référentiel géocentrique, tous les satellites « géostationnaires » évoluent sur une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial, à une altitude $h = 35800\ \mathrm{km}$ environ. Leur période de révolution est égale à un jour sidéral : $T = 86164\ \mathrm{s}$.

## §6. Applications

### Exercice 1

Dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen, la Terre décrit autour du Soleil une trajectoire pratiquement circulaire de rayon $R_T = 1\ \mathrm{ua} = 1{,}496 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$. La période de ce mouvement est $T_T = 365{,}25\ \mathrm{j}$.

La planète Vénus décrit, également dans ce même référentiel, une trajectoire que l'on supposera circulaire. Sa période de révolution est $T_V = 1{,}94 \times 10^7\ \mathrm{s}$.

**Q17.** Déterminer la valeur du rayon de la trajectoire de la planète Vénus autour du Soleil.

**Réponse :** Comme la Terre et Vénus appartiennent au système solaire, on utiliser la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_V^2}{R_V^3} \Longleftrightarrow R_V^3 = R_T^3 \left(\frac{T_V}{T_T}\right)^2 \Longleftrightarrow R_V = R_T \left(\frac{T_V}{T_T}\right)^{\frac{2}{3}}$$

**A.N.** $R_V = 1{,}496 \times 10^{11}\ \mathrm{m} \times \left(\frac{1{,}94 \times 10^7\ \mathrm{s}}{3{,}156 \times 10^7\ \mathrm{s}}\right)^2 = 1{,}08 \times 10^{11}\ \mathrm{m} = 0{,}72\ \mathrm{ua}.$

### Exercice 2

Un satellite est placé sur une orbite circulaire de rayon $R = 20000\ \mathrm{km}$, située dans le plan équatorial de la Terre. Il se déplace d'Ouest en Est.

Dans le repère géocentrique supposé galiléen, la période de révolution du satellite est $T = 7{,}82\ \mathrm{h}$.

**Donnée** : constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

**Q18.** En déduire la valeur de la masse de la Terre.

**Réponse :** On a démontré dans ce document que :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Longleftrightarrow M_S = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

**A.N.** $M_S = \frac{4 \times \pi^2 \times (2{,}00 \times 10^7\ \mathrm{m})^3}{6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}} \times (2{,}82 \times 10^4\ \mathrm{s})^2} = 5{,}95 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}.$

### Exercice 3

Le satellite **Explorer 3** avait une trajectoire circulaire. Il évoluait à une altitude $h = 180 \times 10^3$ m au-dessus de la surface de la Terre.

**Données** : $g_0$(au sol) $= 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ ; $R_T = 6376$ km.

**Q19.** Calculer la période de révolution du satellite.

**Réponse :** On a démontré dans ce document que :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \iff T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} r^3 \iff T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h)^3$$

Comme la masse de la Terre n'est pas donnée, il faut déterminer sa valeur de façon indirecte :

$$g_0 = \mathcal{G}(R_T) = \frac{GM_T}{R_T^2} \iff GM_T = g_0 R_T^2$$

Finalement,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2} (R_T + h)^3$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 R_T^2}}$$

**A.N.** $T = 2 \times \pi \times \sqrt{\dfrac{(6376 \times 10^3\ \mathrm{m} + 180 \times 10^3\ \mathrm{m})^3}{9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \times (6376 \times 10^3\ \mathrm{m})^2}} = 5{,}28 \times 10^3\ \mathrm{s} = 88\ \mathrm{min}.$

**Q20.** Calculer la vitesse du satellite.

**Réponse :** L'orbite, de rayon $r = R_T + h$ est parcourue à la vitesse constante $v$, la période a donc pour expression :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} \iff v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$

**A.N.** $v = \dfrac{2 \times \pi \times (6376 \times 10^3\ \mathrm{m} + 180 \times 10^3\ \mathrm{m})}{5{,}28 \times 10^3\ \mathrm{s}} = 7{,}80 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 7{,}80\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$

### Exercice 4

En octobre 1957, le premier satellite spoutnik 1 avait une période de révolution de 96 min.

**Données** : $g_0$(au sol) $= 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ ; $R_T = 6376$ km.

**Q21.** En admettant que sa trajectoire était circulaire, déterminer l'altitude de ce satellite.

**Réponse :** On a démontré dans ce document que :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \iff r = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Comme la masse de la Terre n'est pas donnée, il faut déterminer sa valeur de façon indirecte :

$$g_0 = \mathcal{G}(R_T) = \frac{GM_T}{R_T^2} \iff GM_T = g_0 R_T^2$$

Finalement,

$$r = \left(\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

L'altitude $h$ du satellite est telle que $r = R_T + h$, on peut donc en déduire que :

$$h = \left(\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R_T$$

**A.N.** $h = \left(\dfrac{9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \times (6376 \times 10^3\ \mathrm{m})^2 \times (5{,}76 \times 10^3\ \mathrm{s})^2}{4 \times \pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 6376 \times 10^3\ \mathrm{m} = 5{,}71 \times 10^5\ \mathrm{m} = 571\ \mathrm{km}.$

**Q22.** Calculer la vitesse du satellite.

**Réponse :** L'orbite, de rayon $r = R_T + h$ est parcourue à la vitesse constante $v$, la période a donc pour expression :

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} \Longleftrightarrow v = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$

**A.N.** $v = \dfrac{2 \times \pi \times (6376 \times 10^3\ \mathrm{m} + 5{,}71 \times 10^5\ \mathrm{m})}{5{,}76 \times 10^3\ \mathrm{s}} = 7{,}58 \times 10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 7{,}58\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$

**Exercice 5**

Un satellite a une orbite circulaire de rayon $r = 18000\ \mathrm{km}$ située dans le plan équatorial terrestre. Il se déplace vers l'Est. La période de rotation de la Terre est de $T = 86164\ \mathrm{s}$.

**Données** : $g_0(\text{au sol}) = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ ; $R_T = 6376\ \mathrm{km}$.

**Q23.** Calculer la période du satellite dans le référentiel géocentrique.

**Réponse :** On a démontré dans ce document que :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Longleftrightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} r^3$$

Comme la masse de la Terre n'est pas donnée, il faut déterminer sa valeur de façon indirecte :

$$g_0 = \mathcal{G}(R_T) = \frac{GM_T}{R_T^2} \Longleftrightarrow GM_T = g_0 R_T^2$$

Finalement,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{g_0 R_T^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}}$$

**A.N.** $T = 2 \times \pi \times \sqrt{\dfrac{(1{,}80 \times 10^7\ \mathrm{m})^3}{9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \times (6376 \times 10^3\ \mathrm{m})^2}} = 2{,}40 \times 10^4\ \mathrm{s} = 6{,}67\ \mathrm{h}.$

**Q24.** Calculer sa vitesse et son accélération par rapport au référentiel géocentrique.

**Réponse :** L'orbite, de rayon $r$, est parcourue à la vitesse constante $v$, la période a donc pour expression :

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Longleftrightarrow v = \frac{2\pi r}{T}$$

**A.N.** $v = \dfrac{2 \times \pi \times 1{,}80 \times 10^7\ \mathrm{m}}{2{,}40 \times 10^4\ \mathrm{s}} = 4{,}71 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}71\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

L'accélération $a$ est telle que :

$$a = \frac{v^2}{r}$$

**A.N.** $a = \dfrac{\left(4{,}71 \times 10^3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)^2}{1{,}80 \times 10^7\ \mathrm{m}} = 1{,}23\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

## §7. Les trajectoires possibles d'un système soumis à la gravitation

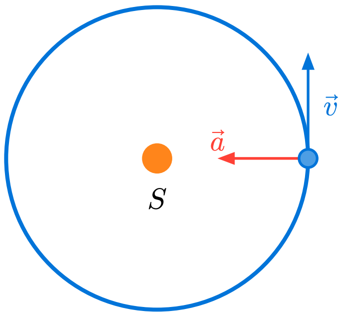



Fig. 8. – *Trajectoire :* **cercle**
(orbite fermée stable, la vitesse est inférieure à la vitesse de libération).

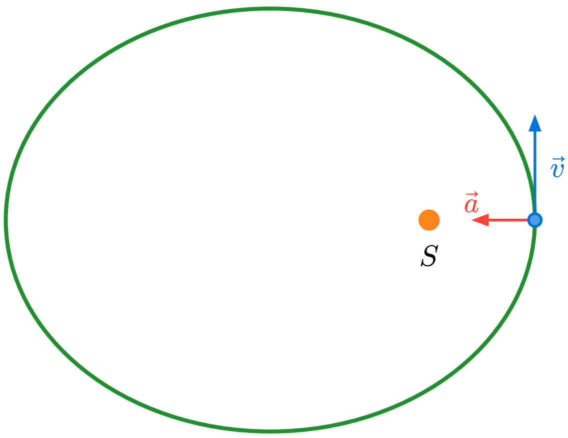



Fig. 9. – *Trajectoire :* **ellipse**
(orbite fermée stable, la vitesse est inférieure à la vitesse de libération).

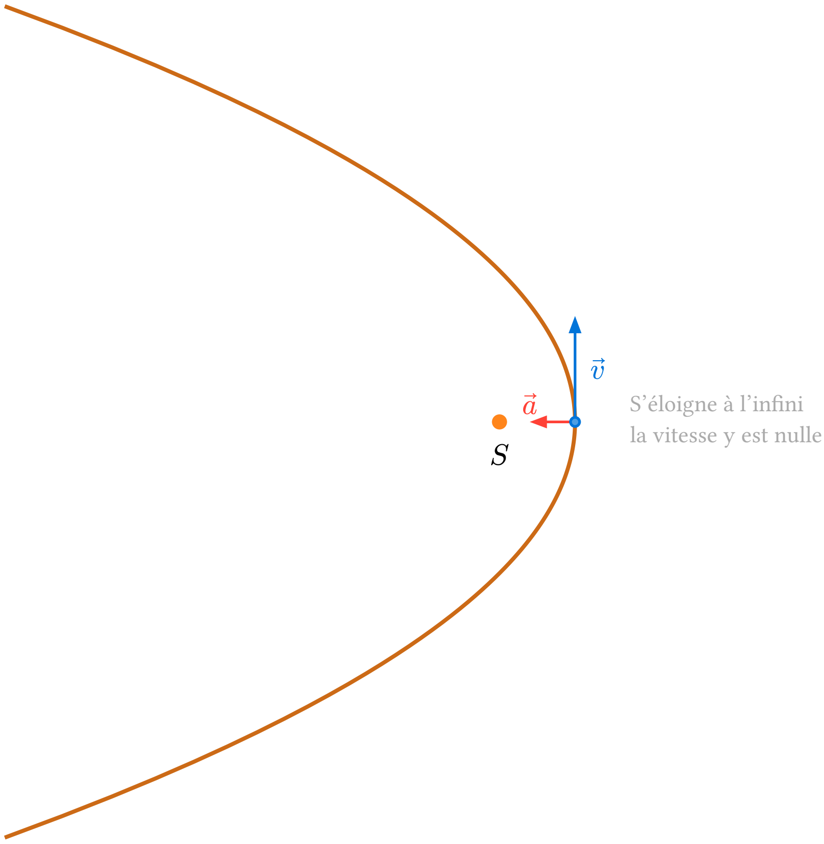



Fig. 10. – *Trajectoire :* **parabole**
(orbite ouverte, la vitesse est égale à la vitesse de libération).

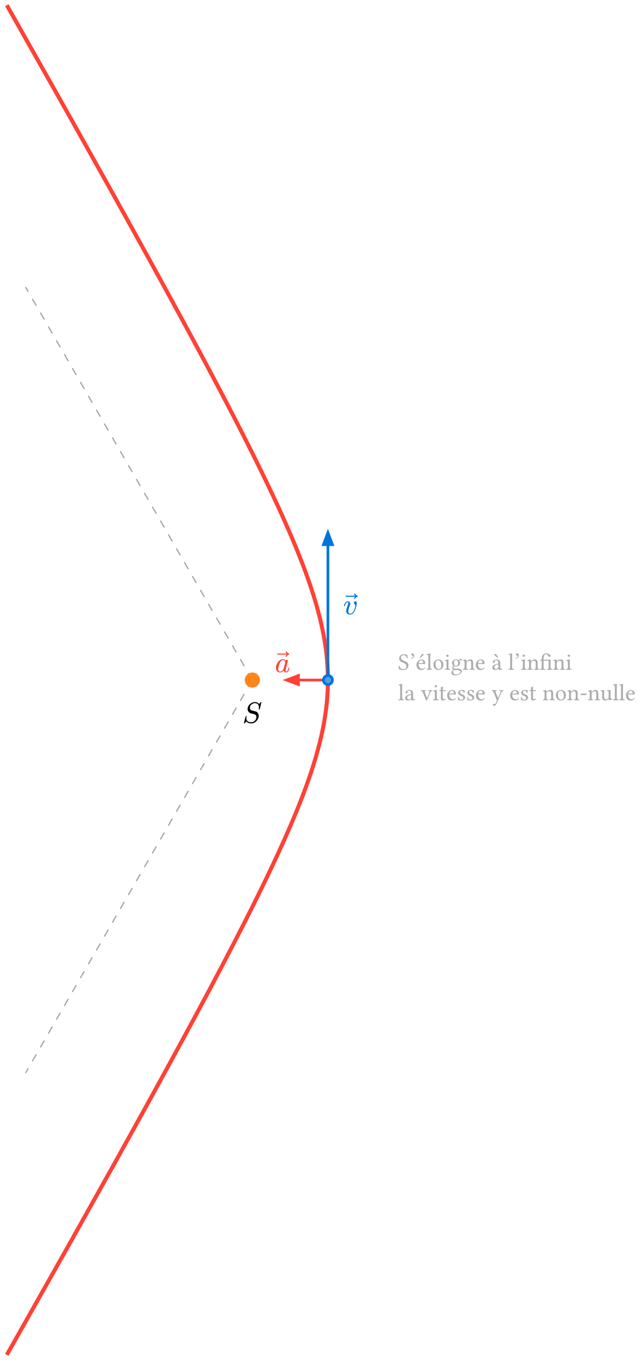



Fig. 11. – *Trajectoire :* **hyperbole**
(orbite ouverte, la vitesse est supérieure à la vitesse de libération).