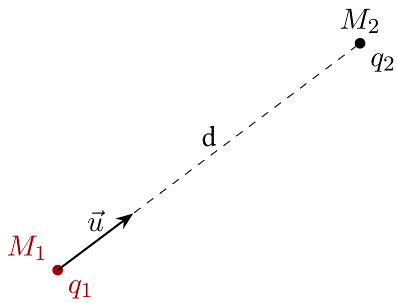
Mouvement d'un objet ponctuel dans le champ électrique uniforme

Doc. 8,5

A Champ électrique

A.1 Force de Coulomb



Force de Coulomb

Lorsque deux charges électriques immobiles se trouvent aux points M_1 et M_2 de l'espace, on modélise l'action de la charge q_1 sur la charge q_2 par une force, la force de Coulomb, dont les caractéristiques sont :

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = \begin{cases} \textbf{Point d'application :} & M_2 \\ \textbf{Direction :} & \text{droite } (M_1M_2) \\ \textbf{Sens :} & \text{dépend des signes des charges} \\ \textbf{Valeur :} & F_{q_1/q_2} = k\,\dfrac{|q_1 \cdot q_2|}{d^2} \end{cases}$$

Principe des actions réciproques

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = -\vec{F}_{q_2/q_1}$$

Expression vectorielle

On peut exprimer de façon plus condensée la force de Coulomb en utilisant le vecteur unitaire $\vec{u}$ de la droite (M_1M_2) :

$$\vec{F}_{q_1/q_2} = k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}\,\vec{u}$$

— Si q_1 et q_2 sont de *même signe*, $q_1 \cdot q_2 > 0$, $\vec{F}_{q_1/q_2}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires de même sens : *l'interaction est répulsive* ;

— Si q_1 et q_2 sont de *signes opposés*, $q_1 \cdot q_2 < 0$, $\vec{F}_{q_1/q_2}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires de sens opposés : *l'interaction est attractive.*

A.2 Qu'appelle-t-on « champ électrique » ?

- Si on remplace, au point M_2, la charge électrique q_2 par une charge électrique q_3, cette dernière est soumise de la part de la particule q_1, à une action modélisée par la force : $\vec{F}_{q_1/q_3} = k\,\dfrac{q_1 \cdot q_3}{d^2}\,\vec{u}$;
- Si on remplace, au point M_2, la charge électrique q_3 par une charge électrique q_4, cette dernière est soumise de la part de la particule q_1, à une action modélisée par la force : $\vec{F}_{q_1/q_4} = k\,\dfrac{q_1 \cdot q_4}{d^2}\,\vec{u}$;
- ...

Champ électrique

Quelle que soit la charge électrique qui subit l'action de la charge q_1, on constate que :

$$\frac{\vec{F}_{q_1/q_2}}{q_2} = \frac{\vec{F}_{q_1/q_3}}{q_3} = \frac{\vec{F}_{q_1/q_4}}{q_4} = \cdots = k\,\frac{q_1}{d^2}\,\vec{u} = \vec{E}(M_2)$$

$\vec{E}(M_2)$, *champ électrique au point M_2 créé par la charge électrique* q_1, représente *la force électrique que subirait une charge électrique de valeur $q = 1\,\mathrm{C}$, placée au point M_2, de la part de la charge q_1.*

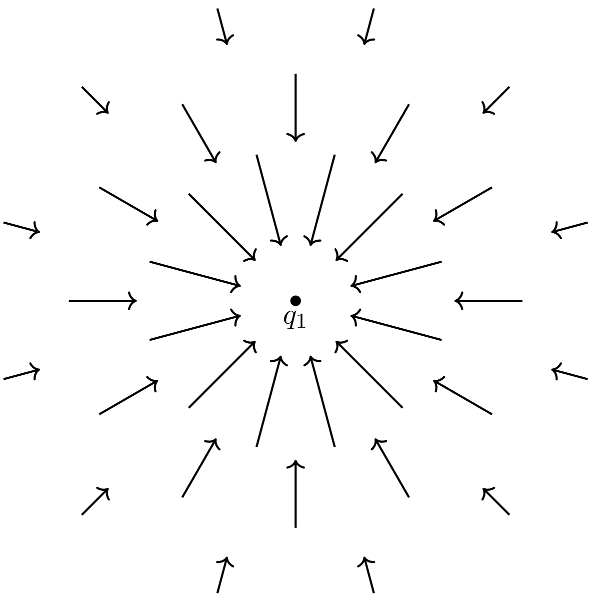
Relation entre la force électrique et le champ électrique en un point

La présence de la charge q_1 au point M_1 « communique » à tout point de l'espace la propriété suivante : « Toute charge électrique q placée en un point M de l'espace subit de la part de q_1 la force :

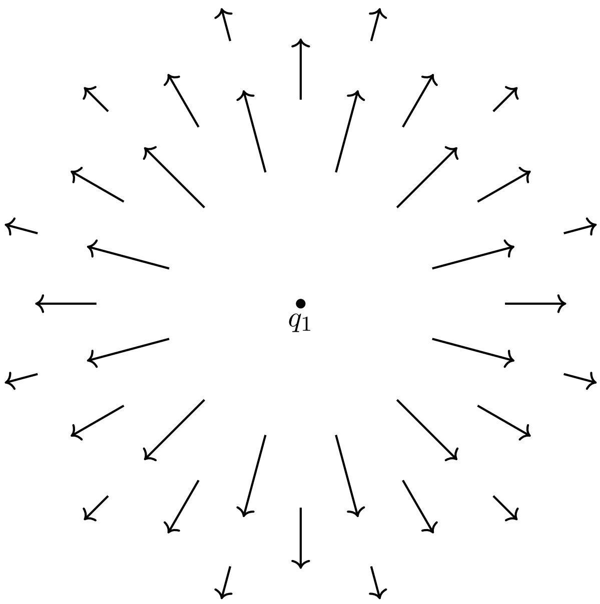
$$\vec{F}_{el} = q\vec{E}(M)$$

où $\vec{E}(M)$ est le champ électrique créé par la charge q_1, au point M. »

Remarque. En un point de l'espace les champs électriques créés par différentes charges s'additionnent.



Carte du champ électrique $\vec{E}(M)$ lorsque $q_1 < 0$.

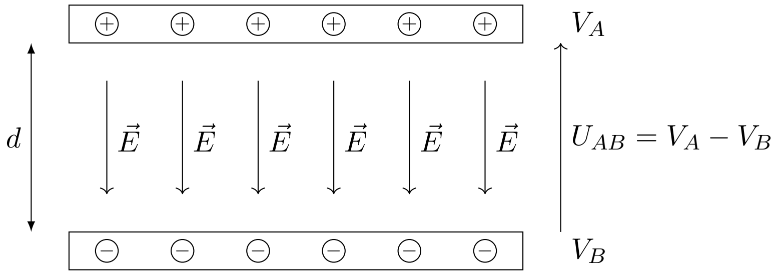


Carte du champ électrique $\vec{E}(M)$ lorsque $q_1 > 0$.

- La direction du champ électrique dépend du point M considéré ;
- La valeur du champ électrique varie comme l'inverse du carré de la distance à la charge q_1.

Généralement, le vecteur champ électrique n'est pas uniforme.

A.3 Comment créer un champ électrique uniforme ?



Le champ électrique créé entre deux armatures planes, parallèles et chargées (condensateur plan) est uniforme.

A.4 Relation entre le potentiel électrique V_M et le champ électrique $\vec{E}_M$

Le champ électrique $\vec{E}(M)$ est le taux de variation, dans l'espace, du potentiel électrique V_M au point M, *dans la direction et le sens considérés*[a].

a. Si vous poursuivez des études en physique, vous découvrirez qu'on appelle « gradient » ce taux de variation dans l'espace.

Si le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme entre deux points A et B, de potentiels électriques V_A et V_B, cela signifie que *le potentiel électrique varie de façon affine entre ces points.*

Si le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme entre deux points A et B, de potentiels électriques V_A et V_B, séparés d'une distance d, alors :

$$E = \left| \frac{V_B - V_A}{x_B - x_A} \right| = \frac{|U|}{d} \tag{1}$$

où $U = V_B - V_A$ est la tension électrique entre les points A et B.

L'unité du champ électrique est le volt par mètre ($\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}$).

Le champ électrique $\vec{E}$ est orienté dans le sens des potentiels décroissants.

B Est-il possible de définir une énergie potentielle électrique ?

Rappel : Comment détermine-t-on l'expression de l'énergie potentielle associée à une interaction ?

1. On vérifie que la force $\vec{F}_{el}$ qui modélise l'interaction électrique est **conservative**.
2. On détermine l'expression du travail qu'effectuerait un *opérateur* déplaçant le système (ici une charge électrique) dans le champ électrique $\vec{E}$ *à vitesse nulle*, de façon à ce que l'accélération soit nulle.
3. L'énergie fournie par l'opérateur est stockée par le système :

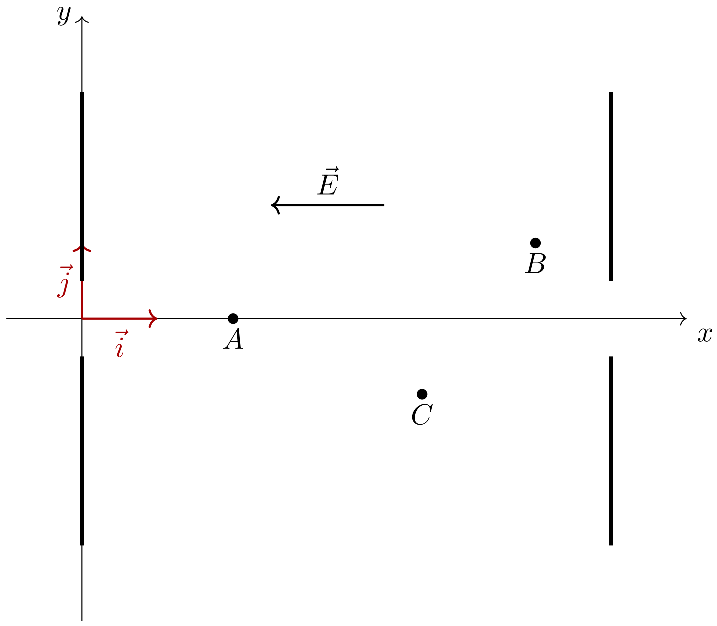
$$\Delta E_p = W_{AB}(\vec{F}_{op}) = -W_{AB}(\vec{F}_{el})$$

puisqu'à chaque instant $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{el}$.

B.1 La force électrique créée par un champ électrique uniforme est conservative

Q 1. Quelle caractéristique possède une force conservative ?

Solution : Le travail entre deux points A et B d'une force conservative *ne dépend pas du chemin suivi* par le système sur lequel s'applique la force conservative entre ces points. Ce travail ne dépend que des caractéristiques des deux points.



Une particule de charge électrique q est déplacée du point A, où règne le potentiel électrique V_A, au point B, où règne le potentiel électrique V_B.

On note $(x_A, 0)$, (x_B, y_B), (x_C, y_C) les coordonnées des points A, B et C dans le repère à deux dimensions, orthonormé direct, $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Q 2. Donner les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Solution : Les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont : $(-E, 0)$.

Q 3. En déduire les composantes de la force électrique $\vec{F_{el}}$ dans le même repère.

Solution : Les composantes de la force électrique $\vec{F_{el}}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont : $(-qE, 0)$.

Q 4. De quelle grandeur le sens de la force électrique dépend-il ?

Solution : Le sens de la force électrique dépend du signe de la charge électrique q.

Q 5. Déterminer l'expression du travail de la force électrique $\vec{F_{el}}$ lorsque la charge électrique se déplace directement du point A au point B en fonction de q, E, x_A et x_B.

Solution : Puisque la force électrique est constante lorsque le champ est uniforme, $W_{AB}(\vec{F_{el}}) = \vec{F_{el}} \cdot \overrightarrow{AB}$. On peut déterminer l'expression du résultat du produit scalaire en fonction des coordonnées des vecteurs : $W_{AB}(\vec{F_{el}}) = (-qE)(x_B - x_A) + (0)(y_B - 0) = -qE(x_B - x_A)$.

Q 6. Est-il possible de dire, sans plus de précision, si le travail est moteur ou résistant ?

Solution : Il est impossible de conclure sans connaître le signe de q.

- Si $q > 0$, $W_{AB}(\vec{F_{el}}) < 0$, le travail de la force électrique est résistant pour le déplacement $A \longrightarrow B$.
- Si $q < 0$, $W_{AB}(\vec{F_{el}}) > 0$, le travail de la force électrique est moteur pour le déplacement $A \longrightarrow B$.

Q 7. Déterminer l'expression du travail de la force électrique lorsque la charge électrique se déplace du point A au point B en passant par le point C.

Solution :

$$W_{AB}(\vec{F}_{el}) = W_{AC}(\vec{F}_{el}) + W_{CB}(\vec{F}_{el})$$

Puisque la force électrique est constante lorsque le champ est uniforme, $W_{AC}(\vec{F}_{el}) = \vec{F}_{el} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $W_{CB}(\vec{F}_{el}) = \vec{F}_{el} \cdot \overrightarrow{CB}$, on peut donc écrire :

$$W_{AB}(\vec{F}_{el}) = \vec{F}_{el} \cdot \overrightarrow{AC} + \vec{F}_{el} \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{F}_{el} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{F}_{el} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le travail de la force électrique ne dépend pas du chemin suivi entre A et B.

La force électrique est une force conservative.

B.2 Expression du travail d'un opérateur qui déplaçe une charge électrique dans un champ électrique uniforme

Q 8. Déterminer l'expression du travail qu'exerce un opérateur qui compense à chaque instant la force électrique q du point A au point B, en faisant en sorte que le déplacement se fasse à vitesse nulle.
Exprimer ce travail en fonction de q, E, x_A et x_B.

Solution : Puisque le mouvement de la charge électrique est rectiligne et sans vitesse (donc sans accélération), la force que l'opérateur exerce sur cette charge compense à chaque instant la force électrique qui agit sur la charge :

$$\vec{F}_{op} + \vec{F}_{el} = \vec{0} \iff \vec{F}_{op} = -\vec{F}_{el} \tag{2}$$

Puisque $\vec{F}_{op}$ est une force constante, $W_{AB}(\vec{F}_{op}) = \vec{F}_{op} \cdot \overrightarrow{AB}$. En utilisant (2), on peut écrire :

$$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = -W_{AB}(\vec{F}_{el}) = -(-qE)(x_B - x_A) = qE(x_B - x_A)$$

Q 9. Exprimer le travail $W_{AB}(\vec{F}_{op})$ de l'opérateur en fonction de q, V_A et V_B où V_A et V_B sont les potentiels électriques aux points A et B.

Solution : La relation (1) donne : $V_B - V_A = E(x_B - x_A)$. Le travail de l'opérateur peut donc s'écrire :

$$W_{AB}(\vec{F}_{op}) = q(V_B - V_A)$$

B.3 Expression de l'énergie potentielle électrique

Q 10. Déduire, de la relation du travail $W_{AB}(\vec{F}_{op})$ exercé par un opérateur qui déplace la charge électrique q d'un point A à un point B, l'expression de la variation d'énergie potentielle électrique ΔE_{Pel} lorsque la charge se déplace du point A au point B.

Solution : L'énergie transférée par l'opérateur à la charge électrique fait varier son énergie potentielle électrique :

$$\Delta E_{Pel} = W_{AB}(\vec{F}_{op}) = q(V_B - V_A)$$

Q 11. Déduire de la réponse à la question précédente l'expression de l'énergie potentielle électrique.

Solution :

$$\begin{aligned}\Delta E_{Pel} &= q(V_B - V_A)\\ &E_{Pel}(B) - E_{Pel}(A)\end{aligned}$$

On peut donc en déduire que :

$$E_{Pel}(M) = q\,V_M + \text{cste}$$

L'énergie potentielle électrique d'une charge électrique q placée en un point M de l'espace, où règne le potentiel électrique V_M, a pour expression

$$E_{Pel}(M) = qV_M + \text{cste}$$

Rappel : Seules les variations d'énergies ont un sens physique. Les énergies potentielles d'interaction sont définies à une constante additive près. Lorsqu'on calcule une variation d'énergie potentielle d'interaction, l'influence du choix de la constante additive disparaît.

C Mouvement d'un électron dans un oscilloscope

Un oscilloscope utilise un écran à tube cathodique pour afficher les variations d'une tension électrique en fonction du temps. Dans un tube cathodique, un faisceau d'électrons est accéléré et dirigé vers l'écran phosphorescent, où il crée des points lumineux en frappant la surface. Ces points sont déplacés en fonction des tensions appliquées aux plaques de déviation, traduisant le signal en une courbe.

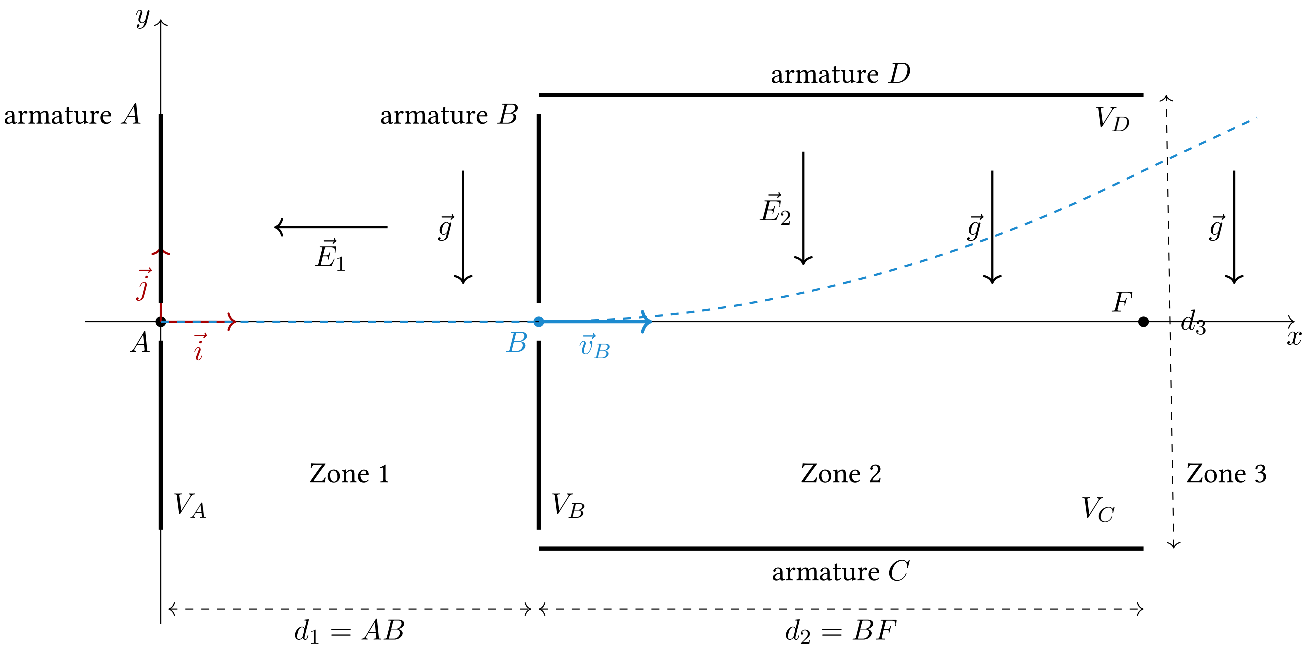


Schéma de principe d'un oscilloscope

Le reste de ce document est dédié à l'étude du mouvement d'un électron dans un oscilloscope.

C.1 Zone 1 : accélération dans un canon à électrons

Un électron, de charge électrique $q = -e$, est produit avec une vitesse quasi-nulle au point A, point d'entrée d'une zone de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}_1$, créé par deux armatures conductrices planes parallèles distantes de $d_1 = AB$, et le champ de pesanteur $\vec{g}$.

On cherche à déterminer la vitesse $\vec{v}_B$ de l'électron au point B.

Données : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $d_1 = AB = 3{,}0\,\mathrm{cm}$; $E_1 = 6{,}0 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

C.1.1 Détermination des équations horaires du mouvement de l'électron — Lois de Newton

Q 12. Établir le diagramme objets – interactions du problème.

Solution :

Q 13. Définir le système.

Solution : Le système est l'électron.

Q 14. Définir le référentiel d'étude du mouvement.

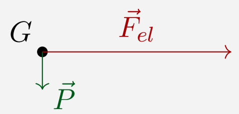
Solution : On étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel terrestre considéré galiléen.

Q 15. Déduire des questions précédentes les interactions à prendre en compte et les modéliser.

Solution : Interactions :
- Système – champ de pesanteur : modélisée par le poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- Système – champ électrique : modélisée par la force électrique $\vec{F}_{1el} = -e\vec{E}_1$;
- Système – air : négligeable à cette échelle.

Q 16. Schématiser la situation.

Solution :



Q 17. Justifier le sens et la direction du champ électrique $\vec{E}_1$.

Solution : On veut accélérer l'électron horizontalement, vers la droite. La force électrique doit donc posséder comme direction une droite horizontale et être orientée vers la droite. Comme la force et le champ électriques sont colinéaires et de sens opposés (car la charge électrique est négative), il est nécessaire que le champ électrique $\vec{E}_1$ ait une direction horizontale et soit orienté vers la gauche.

Q 18. En considérant le sens du champ électrique $\vec{E}_1$, comparer les potentiels électriques V_A et V_B.

Solution : Le champ électrique est dirigé selon les potentiels électriques décroissants. On peut donc dire que $V_B > V_A$.

Q 19. Écrire la deuxième loi de Newton et en déduire l'expression vectorielle du vecteur accélération $\vec{a}_1$ de l'électron.

Solution : Deuxième loi de Newton :

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_{1el} + \vec{P} = -e\vec{E}_1 + m\vec{g}$$

où $\vec{a}_1$ et m sont l'accélération et la masse de l'électron. Finalement,

$$\vec{a}_1 = -\frac{e}{m}\,\vec{E}_1 + \vec{g}$$

Q 20. Comparer les ordres de grandeur des valeurs de la force électrique et du poids. Que peut-on en conclure ?

Solution : $\dfrac{||\vec{F}_{1el}||}{||\vec{P}||} = \dfrac{eE_1}{mg} \simeq \dfrac{1\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \times 1\cdot 10^{5}\,\mathrm{V\cdot m^{-1}}}{1\cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg} \times 1\cdot 10^{1}\,\mathrm{N\cdot kg^{-1}}} = \dfrac{1\cdot 10^{-14}}{1\cdot 10^{-29}} = 1\cdot 10^{15}.$

La valeur de la force électrique est environ 10^{15} fois supérieure à celle du poids ! Par conséquent, l'accélération verticale provoquée par le poids peut être considérée comme négligeable par rapport à l'accélération horizontale engendrée par la force électrique.

Au niveau microscopique, on néglige généralement l'action du poids sur les particules.

Q 21. Modifier, à partir de la réponse à la question précédente, l'écriture de la deuxième loi de Newton.

Solution : Deuxième loi de Newton :

$$\vec{a}_1 = -\frac{e}{m}\,\vec{E}_1$$

Le vecteur accélération $\vec{a}_1$ est colinéaire au vecteur champ électrique $\vec{E}_1$ et de sens opposé, ce qui correspond bien aux caractéristiques attendues.

Q 22. Qualifier le mouvement général de l'électron.

Solution : Le mouvement général de l'électron est un mouvement **uniformément accéléré**.

Q 23. Projeter la deuxième loi de Newton dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ choisi et caractériser le mouvement selon chacun des axes.

Solution : Puisque :

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} -E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la deuxième loi de Newton, une fois projetée sur les axes, devient :

$$\begin{pmatrix} a_{1x} \\ a_{1y} \\ a_{1z} \end{pmatrix} = -\frac{e}{m}\begin{pmatrix} -E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{eE_1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{cases} a_{1x} = \dfrac{eE_1}{m} \\ a_{1y} = 0 \\ a_{1z} = 0 \end{cases}$$

Si le mouvement est *uniformément accéléré* selon l'axe (Ox), il n'est *pas possible de conclure* quant à la forme du mouvement selon les axes (Oy) et (Oz). Ces mouvements peuvent être *uniformes* ou *nuls (repos)*.

Q 24. Établir les expressions des composantes du vecteur vitesse $\vec{v}_1$ et finaliser la caractérisation du mouvement selon chacun des axes.

Solution : Composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} a_{1x} = \dfrac{\mathrm{d}v_{1x}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{eE_1}{m} \\ a_{1x} = \dfrac{\mathrm{d}v_{1y}}{\mathrm{dt}} = 0 \\ a_{1z} = \dfrac{\mathrm{d}v_{1z}}{\mathrm{dt}} = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} v_{1x}(t) = \dfrac{eE_1}{m}\,t + A \\ v_{1y}(t) = B \\ v_{1z}(t) = C \end{cases}$$

Conditions initiales pour la vitesse :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{cases} v_{1x}(0) = A = 0 \\ v_{1y}(0) = B = 0 \\ v_{1z}(0) = C = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} v_{1x}(t) = \dfrac{eE_1}{m}\, t \\ v_{1y}(t) = 0 \\ v_{1z}(t) = 0 \end{cases}$$

Il n'y a *aucun mouvement selon les axes* (Oy) et (Oz).

Q 25. Établir les équations horaires du mouvement de l'électron.

Solution : Composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$:

$$\begin{cases} v_{1x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{dt}} = \dfrac{eE_1}{m}\, t \\ v_{1y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{dt}} = 0 \\ v_{1z}(t) = \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{dt}} = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{eE_1}{m}\, t^2 + D \\ y_1(t) = E \\ z_1(t) = F \end{cases}$$

Conditions initiales pour la position :

$$\overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} x_1(0) = D = 0 \\ y_1(0) = E = 0 \\ z_1(0) = F = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{eE_1}{m}\, t^2 \\ y_1(t) = 0 \\ z_1(t) = 0 \end{cases}$$

C.1.2 Détermination de la valeur de la vitesse au point B

Q 26. Déterminer, à partir des équations horaires du mouvement, l'expression et la valeur de la vitesse de l'électron au point B.

Solution : Les équations horaires du mouvement ne permettent pas de répondre directement à cette question. Il faut reformuler la question en faisant apparaître le temps : *À quelle date l'électron parvient-il en B ? Connaissant cette date, quelle est sa vitesse ?*

Si on note t_B la date à laquelle l'électron parvient en B, alors

$$x_1(t_B) = \frac{1}{2}\frac{eE_1}{m}t_B^2 = d_1 \iff t_B = \sqrt{\frac{2md_1}{eE_1}}$$

et

$$v_{1B} = v_{1x}(t_B) = \frac{eE_1}{m}\sqrt{\frac{2md_1}{eE_1}}$$

finalement

$$v_{1B} = \sqrt{\frac{2eE_1d_1}{m}}$$

A.N. $t_B = 2{,}4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}$; $v_{1B} = 2{,}5 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

C.1.3 Détermination de la valeur de la vitesse au point B — Théorème de l'énergie cinétique

Q 27. Déterminer l'expression et la valeur de la vitesse de l'électron au point B à partir d'un raisonnement basé sur le théorème de l'énergie cinétique.

Solution :

- Au point A : $E_C(A) = 0$ puisque l'électron est produit sans vitesse ;
- Au point B : $E_C(B) = \frac{1}{2}mv_{1B}^2$.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = W_{AB}(\vec{F}_{1el}) = \vec{F}_{1el} \cdot \overrightarrow{AB} = -e\vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{AB}$$

Puisque les vecteurs sont colinéaires et de sens opposés, $-e\vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = eE_1d_1$

$$\frac{1}{2}mv_{1B}^2 = eE_1d_1 \iff v_{1B} = \sqrt{\frac{2eE_1d_1}{m}}$$

C.1.4 Détermination de la valeur de la vitesse au point B — Théorème de l'énergie mécanique

Q 28. Déterminer l'expression et la valeur de la vitesse de l'électron au point B à partir d'un raisonnement basé sur le théorème de l'énergie mécanique.

Solution : La seule force qui s'applique sur l'électron est la force électrique, force conservative. *L'énergie mécanique de l'électron se conserve donc.*

- Au point A : $E_M(A) = E_C(A) + E_{Pel}(A) = -eV_A + \text{cste}$ puisque l'électron est produit sans vitesse.
- Au point B : $E_M(B) = E_C(B) + E_{Pel}(B) = \frac{1}{2}mv_{1B}^2 - eV_B + \text{cste}$.

Puisque l'énergie mécanique se conserve : $\Delta E_M = 0 \iff E_M(A) = E_M(B)$ donc

$$-eV_A + \text{cste} = \frac{1}{2}mv_{1B}^2 - eV_B + \text{cste} \iff v_{1B} = \sqrt{\frac{2e}{m}(V_B - V_A)}$$

Comme $E_1 = \dfrac{V_B - V_A}{d_1}$,

$$v_{1B} = \sqrt{\frac{2eE_1d_1}{m}}$$

C.2 Zone 2 : Déviation de l'électron

L'électron entre maintenant dans la zone 2, au sein de laquelle règne un champ électrique $\vec{E}_2$, avec la vitesse $\vec{v}_B$ déterminée dans la section précédente.

On redéfinit l'origine des dates, $t = 0$ à l'instant où l'électron entre dans cette zone, et le repère d'espace, est désormais $(B; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On cherche à vérifier si l'électron peut quitter cette zone sans toucher l'une des armatures.

Données : $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$; $d_3 = CD = 3{,}0\,\mathrm{cm}$; $d_2 = BF = 6{,}0\,\mathrm{cm}$; $E_2 = 1{,}0 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$, $g = 9{,}81\,\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$.

C.2.1 Détermination des équations horaires — Lois de Newton

Q 29. Étudier la nouvelle situation et déterminer l'expression de l'accélération $\vec{a}_2$ de l'électron dans la zone 2.

Solution : Le diagramme objets - interactions est identique à celui du mouvement dans la zone 1, si on remplace le champ $\vec{E}_1$ par le champ $\vec{E}_2$. La deuxième loi de Newton s'écrit donc :

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{2el} = -e\vec{E}_2$$

ou

$$\vec{a}_2 = -\frac{e}{m}\,\vec{E}_2$$

Le mouvement est *uniformément accéléré.*

Q 30. Projeter la deuxième loi de Newton sur les trois axes du repère choisi et caractériser le mouvement pour chacun des axes.

Solution : Puisque :

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la deuxième loi de Newton, une fois projetée sur les axes, devient :

$$\begin{pmatrix} a_{2x} \\ a_{2y} \\ a_{2z} \end{pmatrix} = -\frac{e}{m}\begin{pmatrix} 0 \\ -E_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{eE_2}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalement,

$$\begin{cases} a_{2x} = 0 \\ a_{2y} = \dfrac{eE_2}{m} \\ a_{2z} = 0 \end{cases}$$

Le mouvement est donc *uniformément accéléré* selon l'axe (By). Il n'est pas possible de conclure quant à la forme du mouvement selon les axes (Bx) et (Bz) : *mouvements uniformes* ou *pas de mouvement.*

Q 31. Établir les expressions des composantes du vecteur vitesse et et caractériser le mouvement pour chacun des axes.

Solution : Composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} a_{2x} = \dfrac{\mathrm{d}v_{2x}}{\mathrm{dt}} = 0 \\ a_{2x} = \dfrac{\mathrm{d}v_{2y}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{eE_2}{m} \\ a_{2z} = \dfrac{\mathrm{d}v_{2z}}{\mathrm{dt}} = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} v_{2x}(t) = A \\ v_{2y}(t) = \dfrac{eE_2}{m}t + B \\ v_{2z}(t) = C \end{cases}$$

Conditions initiales pour la vitesse :

$$\vec{v}_2(0) = \vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} v_{2x}(0) = A = v_B \\ v_{2y}(0) = B = 0 \\ v_{2z}(0) = C = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} v_{2x}(t) = v_B \\ v_{2y}(t) = \dfrac{eE_2}{m}t \\ v_{2z}(t) = 0 \end{cases}$$

Il n'y a aucun mouvement selon l'axe (Bz) alors que le mouvement est uniforme selon l'axe (Bx).

Q 32. Établir les équations horaires du mouvement de l'électron.

Solution : Composantes du vecteur position :

$$\begin{cases} v_{2x}(t) = \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{dt}} = v_B \\ v_{2y}(t) = \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{dt}} = \dfrac{eE_2}{m}t \\ v_{2z}(t) = \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{dt}} = 0 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x_2(t) = v_B t + D \\ y_2(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{eE_2}{m}t^2 + E \\ z_2(t) = F \end{cases}$$

Conditions initiales pour la position :

$$\overrightarrow{BM}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases} x_2(0) = D = 0 \\ y_2(0) = E = 0 \\ z_2(0) = F = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} x_2(t) = v_B\, t \\ y_2(t) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{eE_2}{m}\, t^2 \\ z_2(t) = 0 \end{cases}$$

C.2.2 Équation de la trajectoire

Q 33. Établir l'équation de la trajectoire de l'électron dans la zone 2 du mouvement.

Solution : Pour obtenir l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps des équations horaires :

$$x_2(t) = v_B t \iff t = \frac{x_2}{v_B}$$

donc

$$y_2(x_2) = \frac{1}{2}\,\frac{eE_2}{m}\left(\frac{x_2}{v_B}\right)^2$$

C'est une parabole qui passe par B et qui est orientée vers le haut.

C.2.3 À quelle condition l'électron peut-il quitter cette zone de l'espace sans toucher l'armature supérieure ?

Q 34. Vérifier à l'aide des données expérimentales fournies que l'électron quitte le condensateur sans avoir touché les armatures.

Solution : On fait l'hypothèse que l'électron va toucher l'armature supérieure. Soit x_{2p} l'abscisse de l'électron lorsque cet évènement intervient. À partir de l'équation de la trajectoire (c'est aussi possible à partir des équations horaires), on peut déterminer que :

$$y_2(x_{2p}) = \frac{d_3}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{eE_2}{m}\left(\frac{x_{2p}}{v_B}\right)^2$$

soit

$$x_{2p} = v_B\sqrt{\frac{md_3}{eE_2}}$$

L'électron ne touche pas l'armature supérieure si $x_{2p} > d_2$, donc si

$$x_{2p} = v_B\sqrt{\frac{md_3}{eE_2}} > d_2$$

A.N. $x_{2p} = 10{,}3\,\text{cm} > 6{,}0\,\text{cm}$.

L'électron quitte bien la zone 2 sans avoir touché les armatures.

Remarque. Il est aussi possible de vérifier que $y_2(d_2) < \dfrac{d_3}{2}$.

Q 35. Établir la condition requise pour que la tension U_2 permette à l'électron de sortir de la zone 2 sans entrer en contact avec les armatures.

Solution : On a démontré, à la question précédente, que l'électron peut quitter la zone 2 sans toucher les armatures si :

$$v_B\sqrt{\frac{md_3}{eE_2}} > d_2 \iff \frac{md_3}{eE_2} > \left(\frac{d_2}{v_B}\right)^2$$

La tension U_2 est telle que :

$$U_2 = E_2 d_3$$

la relation précédente s'écrit donc :

$$\frac{md_3^2}{eU_2} > \left(\frac{d_2}{v_B}\right)^2 \iff U_2 < \frac{m\,v_B^2\,d_3^2}{e\,d_2^2}$$

C.2.4 Coordonnées du points de sortie

Q 36. Déterminer les expressions des coordonnées du point de sortie de l'électron.

Solution : L'électron quitte la deuxième zone lorsque

$$x_{2F} = d_2$$

donc lorsque

$$y_2(x_{2F}) = \frac{1}{2}\frac{eE_2}{m}\left(\frac{d_2}{v_B}\right)^2$$

C.3 Zone 3 : Au-delà du dispositif

Q 37. Quel est le mouvement de l'électron lorsqu'il a quitté les deux zones dans lesquelles règnent les champs électrique $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$?

Solution : Au-delà des deux première zones, il n'existe plus de champ électrique et on peut toujours négliger le poids de l'électron. Ce dernier n'est donc soumis à aucune force, *son mouvement devient rectiligne et uniforme* depuis le point de sortie de la deuxième zone.