Annale : lancement d'une fusée

1.1) Étude cinématique du mouvement

1/ La fusée parcourt des distances de plus en plus grandes pendant des durées égales. Son mouvement est donc accéléré.

2/ Le 1er étage fonctionne pendant 147 s, l'altitude est alors égale à 67 819,00 m. La vitesse moyenne est donc égale à

$$\frac{67819{,}00\ m}{147\ s} = 461\ m.s^{-1}.$$

3/ $v_z(t) = \frac{dz}{dt}$ Puisqu'on ne connaît pas la fonction $z(t)$, on ne peut espérer déterminer que la valeur approchée de la vitesse.

$$\boxed{v(t_i) \simeq \frac{z(t_{i+1}) - z(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}}$$

$$v(t_9) = \frac{z(t_{10}) - z(t_8)}{t_{10} - t_8} = \frac{101{,}40\ m - 63{,}70\ m}{10\ s - 8\ s} = 18{,}9\ m.s^{-1}$$

$$v(t_{11}) = \frac{z(t_{12}) - z(t_{10})}{t_{12} - t_{10}} = \frac{148{,}90\ m - 101{,}40\ m}{12\ s - 10\ s} = 23{,}8\ m.s^{-1}$$

4/ $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ Pour la même raison qu'à la question précédente on ne peut rechercher qu'une valeur approchée de l'accélération.

$$\boxed{a_z(t_i) \simeq \frac{v_z(t_{i+1}) - v_z(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}}$$

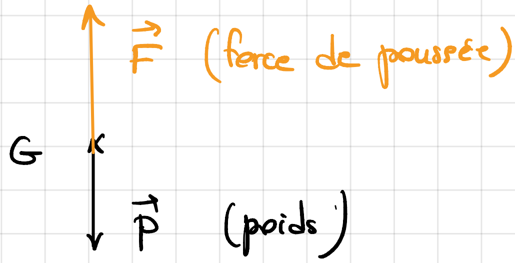
$$a_z(t_{10}) = \frac{v_z(t_{11}) - v_z(t_9)}{t_{11} - t_9} = \frac{23{,}8\ m.s^{-1} - 18{,}9\ m.s^{-1}}{11\ s - 9\ s} = 2{,}45\ m.s^{-2}$$

5/ Le mouvement de la fusée n'est pas uniformément accéléré puisque l'accélération varie (elle augmente) au cours du mouvement.

1.2) Étude dynamique du mouvement

6/ $\vec{F} = -D\,\vec{v_g}$ La direction de $\vec{F}$ est confondue avec celle de $\vec{v_g}$ puisque les deux vecteurs sont colinéaires. Le sens de $\vec{F}$ est opposé à celui de $\vec{v_g}$ et $\boxed{F = D\,v_g}$

7/



8/ $M\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \iff \vec{a} = \dfrac{\vec{P}+\vec{F}}{M}$

- $\vec{a}$ est donc de direction verticale.
- $\vec{P}$ et $\vec{F}$ sont de sens différents mais $P = Mg = 210\times10^3\ kg \times 9{,}8\ N\cdot kg^{-1}$

$P = 2{,}1\times10^3\ N$ (au décollage) et $F = D v_g = 1{,}0\times10^3\ kg\cdot s^{-1} \times 2{,}5\times10^3\ m/s^{-1}$

$F = 2{,}5\times10^6\ N$ (au décollage). donc $\vec{a}$ est dirigé vers le haut.

9/ $a = \dfrac{F-P}{M} = \dfrac{F-Mg}{M} \iff \boxed{a = \dfrac{F}{M} - g}$

10/ Chaque seconde la fusée éjecte la masse D (constante). Au bout de t seconde elle a donc éjecté Dt kilogrammes et elle a alors pour masse : $\boxed{M(t) = M_0 - Dt}$

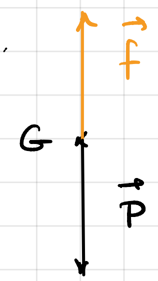
11/ $M(70s) = 210\times10^3\ kg - 1{,}0\times10^3\ kg\cdot s^{-1} \times 70\ s = 140\times10^3\ kg$.

12/ $a(70) = \dfrac{2{,}5\times10^6\ N}{140\times10^3\ kg} - 9{,}8\ m\cdot s^{-2} = 8{,}1\ m\cdot s^{-2}$

13/ La télémétrie indique $a_{70} = 7{,}50\ m\cdot s^{-2}$. La fusée accélère en réalité moins que dans notre modèle mais la différence n'est pas très importante. Il aurait surement fallu prendre en compte les frottements et la variation de la vitesse d'éjection des gaz.

2/ Retour sur Terre

14/



On indique que la vitesse est constante. Si $v_z = cste$,

$a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = 0$. Or $m a_z = f - P$ donc $\boxed{f = P}$

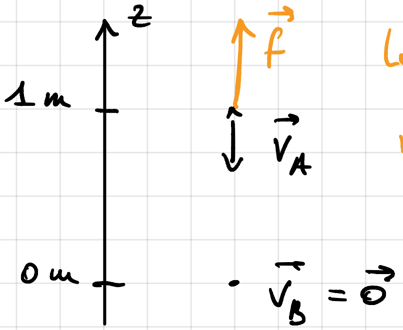
Les deux forces sont verticales et ont des valeurs égales.

15/

16/ Entre deux positions A et B du système au cours de son mouvement

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent sur le système.



La résultante des forces est vers le haut puisqu'il s'agit de ralentir la cabine.

$$\Delta E_c = \underbrace{\cancel{E_c(B)}}_{=0} - E_c(A) = -\frac{1}{2} m v_A^2 = -f \cdot AB$$

puisque $W_{AB}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{AB}$

On a donc $\boxed{f = \frac{m v_A^2}{AB}}$ A.N. $f = \frac{3{,}00 \times 10^3 \, kg \times (10 \, m \cdot s^{-1})^2}{2 \times 1 \, m} = 1{,}5 \times 10^5 \, N$

17/ $\vec{F} = \vec{f} + \vec{P} + \vec{R}$ Comme $\vec{f} + \vec{P} = \vec{0}$, $\boxed{\vec{F} = \vec{R}}$

18/ $m\vec{a} = \vec{R} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m}}$ $\vec{a}$ est vertical et dirigé vers le haut.

19/ Un raisonnement basé sur l'énergie ne fournit pas les durées. Il faut faire appel à la deuxième loi de Newton.

$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} \Rightarrow a_z = \frac{R}{m} = \frac{dv_z}{dt} \Rightarrow v_z(t) = \frac{R}{m} t - v_0$$

$$v_z(t) = \frac{dz}{dt} \Rightarrow z(t) = \frac{1}{2} \frac{R}{m} t^2 - v_0 t + h$$

À quelle date t_s a-t-on $v_z(t_s) = 0$? $v_z(t_s) = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0 m}{R}}$

A.N. $t_s = \frac{3{,}00 \times 10^3 \, \cancel{kg} \times 10 \, \cancel{m} \cdot s^{-1}}{1{,}5 \times 10^5 \, \cancel{kg} \cdot \cancel{m} \cdot s^{-2}} = 0{,}20 \, s.$