Mécanique, exercices

1) Accélération

Ex 1 : $\boxed{a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$ A.N. $a_{moy} = \frac{40\ m/s - 10\ m/s}{5\ s} = 6\ m/s^2$

Ex 2 $\boxed{a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$ A.N. $a_{moy} = \frac{3\ m/s - 15\ m/s}{6\ s} = -2\ m/s^2$ L'accélération est donc égale à $2\ m/s^2$, le système décélère.

Ex 3 $a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$ puisque a est supposée constante. Donc $\Delta v = a\,\Delta t$ et comme $\Delta v = v - v_0$, $\boxed{v = a\,\Delta t + v_0}$ Comme $v_0 = 0\ m/s$, $\boxed{v = a\,\Delta t}$

A.N. $v_a = 3\ m/s^2 \times 6\ s = 18\ m/s$ $\quad v_b = 3\ m/s^2 \times 4\ s = 12\ m/s$

$v_c = 3\ m/s^2 \times 13{,}5\ s = 40{,}5\ m/s$ $\quad v_d = a\,t$

Ex 4 $a_{moy} = \frac{\Delta t}{\Delta t} = a$ puisque a est supposée constante. Donc $\Delta v = a\,\Delta t$ et comme $\Delta v = v - v_0$, $\boxed{v = a\,\Delta t + v_0}$ A.N. $v = 2\ m/s^2 \times 4\ s + 3\ m/s = 11\ m/s$

Ex 5 L'accélération doit être supposée constante sinon le problème n'est pas soluble.

$a = \frac{dv}{dt}$ donc $\boxed{v(t) = a\,t + v_0}$ Parallèlement $v(t) = \frac{dx}{dt} = a\,t + v_0$ donc

$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0}$

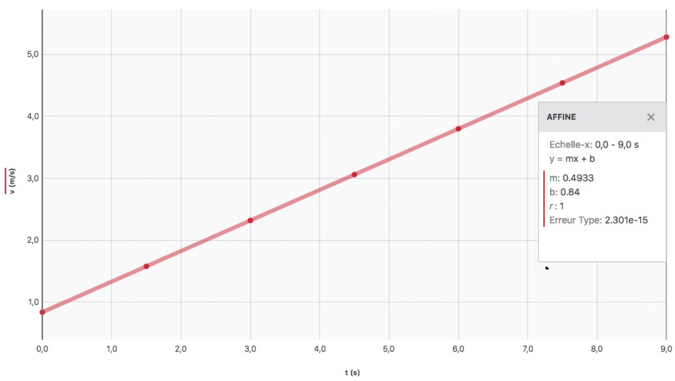
Dans l'énoncé il est dit que la vitesse passe de $30\ m/s$ à $10\ m/s$, la durée nécessaire est alors égale à $\Delta t = \frac{v - v_0}{a}$ avec $v_0 = 30\ m/s$ et $v = 10\ m/s$.

Pendant cette durée le système parcourt la distance $x - x_0 = 200\ m$. Or $x - x_0 = \frac{1}{2} a\,\Delta t^2 + v_0\,\Delta t$ donc $x - x_0 = \frac{1}{2} a \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{1}{2a}(v - v_0)^2 + v_0 (v - v_0) = \frac{v - v_0}{a}\left(\frac{1}{2}(v - v_0) + v_0\right)$

$x - x_0 = \frac{v - v_0}{2a}(v + v_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$ Finalement $\boxed{a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\,\Delta x}}$

A.N : $a = \frac{(10\ m/s)^2 - (30\ m/s)^2}{2 \times 200\ m} = -2\ m/s^2$ ~~L'accélération~~ est égale à $2\ m/s^2$

Ex 6



La modélisation donne $v(t) = 0{,}49\,t + 0{,}84$.

Comme $a(t) = \frac{dv}{dt}$, $a(t) = 0{,}49\ m/s^2$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0{,}49\,t + 0{,}84$

donc $x(t) = \frac{1}{2} \times 0{,}49 \times t^2 + 0{,}84\,t + x_0$

où $\boxed{x - x_0 = (0{,}25\,t + 0{,}84)\,t}$ AN $\Delta x = (0{,}25 \times 5{,}25 + 0{,}84) \times 5{,}25 = 11{,}3$ m

Ex 7 Corps 1 : $v_1 = cste$, donc $v_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t - 0} = \frac{x_1}{t}$ puisque $x_0 = 0$. $\boxed{x_1(t) = v_1 t}$

Corps 2 $a_2 = cste$, donc comme $a_2 = \frac{dv_2}{dt'}$, $v_2(t') = a_2 t'$ puisque $v(t'=0) = 0$

il faut ici noter t' et pas t car le corps 2 ne part pas à la date $t=0$ Cependant on peut effectuer le changement de variable $t' = t - t_d$ où $t_d = 10$ min. et $v_2 = a_2(t - t_d)$. Puisque $v_2(t) = \frac{dx_2}{dt}$, $x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 (t - t_d)^2 + \cancel{x_0}$ $\boxed{x_2(t) = \frac{1}{2} a_2 (t - t_d)^2}$

On cherche la date t_p telle que $x_1(t_p) = x_2(t_p)$ soit $v_1 t_p = \frac{1}{2} a_2 (t_p - t_d)^2$

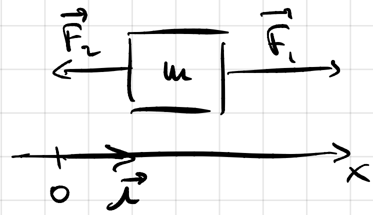
$\Leftrightarrow \frac{1}{2} a_2 t_p^2 - (a_2 t_d + v_1) t_p + \frac{1}{2} a_2 t_d^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_p^2 - 2\left(t_d + \frac{v_1}{a_2}\right) t_p + t_d^2 = 0}$

A.N $t_p^2 - 2\left(10 + \frac{40}{2}\right) t_p + 100 = 0$ $t_p = 1{,}7$ s ou $t_p = 58{,}3$ s. La 1ère solution n'est pas physiquement acceptable puisqu'à cette date le corps 2 n'a pas démarré. Donc $t_p = 58{,}3$ s.

Soit d la distance parcourue : $d = x_1(t_p) = v_1 t_p$ AN $d = 40\ m/s \times 58{,}3\ s = 2{,}3 \times 10^3$ m.

2) Deuxième loi de Newton

Ex 8



Deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

projetée sur l'axe (Ox) : $ma_x = F_1 - F_2$ puisque $\begin{cases} F_{1x} = F_1 \\ F_{2x} = -F_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \boxed{a_x = \frac{F_1 - F_2}{m}}$

a) $a_x = \frac{40\ N - 10\ N}{20\ kg} = 1{,}5\ N/kg = 1{,}5\ m/s^2$ donc $a = 1{,}5\ m/s^2$ et est dirigé vers la droite.

b) $a_x = \frac{20\ N - 100\ N}{20\ kg} = -4\ N/kg = -4\ m/s^2$ donc $a = 4\ m/s^2$ et est dirigé vers la gauche

c) $a_x = \frac{600\ N - 600\ N}{20\ kg}$ $a_x = 0\ N/kg$ donc $a = 0\ m/s^2$

Ex 9 1) $m\vec{a} = \vec{F}$ donc $ma = F \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{F}{a}}$ AN $m = \frac{2000\ N}{4\ m/s^2} = 500\ N.s^2/m = 500$ kg

2) $a = \frac{dv}{dt}$ donc $v(t) = at$ puisque $v_0 = 0$. $v(20) = 4\ m/s^2 \times 20\ s = 80\ m/s$.

$v = \frac{dx}{dt} = at$ donc $x(t) = \frac{1}{2}at^2$ puisque $x_0 = 0$ $x(20) = 0{,}5 \times 4\ m/s^2 \times (20\ s)^2 = 800$ m.

3) Si la force disparait le mouvement devient rectiligne et uniforme puisqu'alors $\vec{a} = \vec{0}$.

4) $m\vec{a} = \vec{F}_{new}$ telle que $ma_x = -F_{new}$ (Projection sur axe (Ox) de même sens que $\vec{v}$)

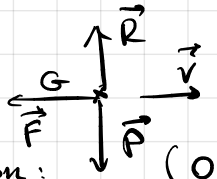
donc $a_x = -\frac{F_{new}}{m}$. Comme $a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{F_{new}}{m}$, $v_x(t) = -\frac{F_{new}}{m}t + v_0$ où $v_0 = 80$ m/s.

On cherche F_{new} telle que $v_x(0,1) = 0 = -\frac{F_{new}}{m}t + v_0 \Leftrightarrow \boxed{F_{new} = \frac{mv_0}{t}}$ AN $F_{new} = \frac{1200\times 80}{0,1} = 9,6\times10^5$ N

$\boxed{\text{Ex 10}}$ → système = {voiture représentée par son centre d'inertie G}

→ référentiel = {terrestre supposé galiléen}

→ Interactions : syst – Terre : $\vec{P}$ et syst. sol : $\vec{R}+\vec{F}$ (on néglige l'interaction avec l'air).

→ Schématisation : 

→ Deuxième loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F} + \underbrace{\vec{R}+\vec{P}}_{\vec{0}} = \vec{F}$

→ Repère de projection : $(O, \vec{i})$ tel que 

$\vec{a}\,(a_x)$ et $\vec{F}\,(F_x = -F)$ donc $ma_x = -F$ ou $\boxed{a_x = -\frac{F}{m}}$

$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{F}{m}$ donc $v_x(t) = -\frac{F}{m}t + v_0$ ← vitesse avant freinage

$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{F}{m}t + v_0$ donc $x(t) = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + v_0 t + x_0$ ← on peut prendre l'origine du repère à l'instant du freinage de façon à ce que $x_0 = 0$

→ Durée pour que la voiture s'arrête :

$v_x(t_p) = -\frac{F}{m}t_p + v_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_p = \frac{mv_0}{F}}$ AN $t_p = \frac{1200\times 100/3,6}{2000} = 16,7$ s

→ Distance parcourue pendant la durée t_p : $x(t_p) = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}t_p^2 + v_0 t_p$

AN $x(t_p) = -0,5\times\frac{2000}{1200}\times 16,7^2 + \frac{100}{3,6}\times 16,7 = 231,5$ m > 100 m La force est insuffisante pour arrêter la voiture.

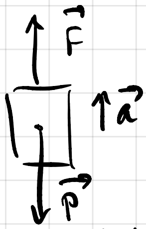
→ Valeur minimale de la force pour arrêter le système.

$\underbrace{x(t_p)}_{=d} = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}t_p^2 + v_0 t_p$ avec $t_p = \frac{mv_0}{F}$ (cette expression littérale est inchangée).

donc $d = -\frac{1}{2}\frac{F}{m}\left(\frac{mv_0}{F}\right)^2 + v_0\frac{mv_0}{F} = -\frac{1}{2}\frac{mv_0^2}{F} + \frac{mv_0^2}{F} = \frac{mv_0^2}{2F} \Leftrightarrow \boxed{F = \frac{mv_0^2}{2d}}$

AN $F = \frac{1200\times(100/3,6)^2}{2\times 100} = 4,63\times10^3$ N

$\boxed{\text{Ex 11}}$

1) 

$m\vec{a} = \vec{F}+\vec{P} \Leftrightarrow ma = F - P \Leftrightarrow F = ma + P = m(a+g)$

AN $F = 20\text{ kg}\times(1,5\text{ m/s}^2 + 10\text{ m/s}^2) = 2,3\times10^2$ N

2) Mouvement rectiligne et uniforme : $\vec{a} = \vec{0}$ et $\vec{F}+\vec{P} = \vec{0}$ donc $F = P$

AN $F = mg$ AN $F = 20\text{ kg}\times 10\text{ N/kg} = 2,0\times10^2$ N.