Décroissance radioactive

Chapitre 15,3

1 Loi de décroissance

1.1 Évolution du nombre de noyaux d'un échantillon de noyaux radioactifs

Soit un échantillon contenant des atomes radioactifs susceptibles de se désintégrer selon l'un des modes définis dans le document d'introduction.

1) Écrire l'équation de désintégration du césium 137, émetteur β^-.

▶ $$^{137}_{55}\mathrm{Cs} \longrightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{0}_{-1}e + \bar{\nu}_e$$

Cette désintégration est de nature probabiliste : c'est un **phénomène aléatoire** ; à chaque instant, il y existe une certaine probabilité pour qu'un noyau se désintègre entre deux dates infiniment voisines t et $t+\mathrm{dt}$. On note cette probabilité $\lambda \cdot \mathrm{dt}$ où λ est une **constante radioactive caractéristique du noyau considéré et indépendante du temps**.

Note. Pour traduire le fait que λ ne varie pas en fonction de l'âge des noyaux, on dit souvent, de manière imagée, que *les noyaux meurent sans vieillir* : pour les « jeunes », ou pour les « vieux », la probabilité de se désintégrer est identique.

Si on considère l'ensemble des noyaux radioactifs (*radionucléides*) d'un échantillon, un détecteur peut compter le nombre de particules émises (par exemple les électrons) pendant une durée Δt. On peut alors déterminer expérimentalement le nombre ΔN de noyaux qui se désintègrent pendant Δt. **Ce nombre est, en fait, aléatoire, fluctuant autour d'une valeur moyenne.** Aussi, on ne peut pas définir avec certitude le nombre $N(t)$ de noyaux existant à une date t. Par contre, on peut évaluer une **valeur moyenne** de $N(t)$ que nous noterons $\bar{N}(t)$.

Intuitivement, on peut alors admettre qu'entre les dates t et $t+\mathrm{dt}$ la variation $d\bar{N}(t)$ du nombre moyen de noyaux est proportionnelle :

- au nombre moyen $\bar{N}(t)$ de noyaux présents à la date t ;
- à la probabilité de désintégration entre les dates t et $t+\mathrm{dt}$ c'est-à-dire : $\lambda \cdot \mathrm{dt}$.

2) Donner l'expression du nombre moyen $|d\bar{N}(t)|$ de noyaux qui se désintègrent entre les dates t et $t+\mathrm{dt}$.

▶ $$|d\bar{N}(t)| = \lambda \bar{N}(t)\,\mathrm{dt}$$

3) Donner l'expression de la variation $d\bar{N}(t)$ du nombre moyen de noyaux dans l'échantillon entre les dates t et $t+\mathrm{dt}$.

▶ $$d\bar{N}(t) = -\lambda \bar{N}(t)\,\mathrm{dt}$$

Le signe $-$ traduit la diminution du nombre de noyaux.

4) En déduire l'équation différentielle du premier ordre qui donne l'évolution du nombre de noyaux dans l'échantillon radioactif.

▶ $$\frac{d\bar{N}}{\mathrm{dt}} + \lambda \bar{N} = 0$$

5) La famille de solutions de l'équation différentielle précédente est

$$\bar{N}(t) = A + B\,e^{-Ct}$$

où A, B et C sont des constantes.

Déterminer les expressions de ces constantes pour que $\bar{N}(t)$ soit la solution au problème étudié, en considérant qu'il existait, dans l'échantillon, N_0 noyaux à la date $t = 0$.

▶

La famille de solutions convient-elle ?

Puisque l'expression de $\bar{N}(t)$ donnée constitue une famille de solutions possibles, elle vérifie l'équation différentielle pour $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(A + B\,e^{-Ct})}{\mathrm{dt}} + \lambda\,(A + B\,e^{-Ct}) &= 0 \\
-B\,C\,e^{-Ct} + \lambda\,A + \lambda\,B\,e^{-Ct} &= 0 \\
\lambda\,A + B\,(-C + \lambda)\,e^{-\lambda t} &= 0 \\
B\,(-C + \lambda)\,e^{-\lambda t} &= -\lambda\,A \qquad (1)
\end{aligned}$$

Le terme à gauche du signe égal dépend du temps alors que celui à droite est constant au cours du temps. La seule possibilité est donc que le terme de gauche soit nul, pour $t \geqslant 0$:

$$B\,(-C + \lambda)\,e^{-\lambda t} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \text{et / ou} \\ -C + \lambda = 0 \end{cases}$$

La première solution est impossible, car si $B = 0$, $\bar{N}(t)$ est une constante au cours du temps ; le nombre de noyaux radioactifs reste constant au cours du temps !
La solution est donc

$$-C + \lambda = 0 \Longleftrightarrow \boxed{C = \lambda}$$

Si on injecte cette solution dans l'équation (1), on obtient

$$\boxed{A = 0}$$

La famille de solutions peut donc s'écrire :

$$\bar{N}(t) = B\,e^{-\lambda t}$$

Quelle est la solution au problème ?

Pour déterminer la solution au problème, il faut prendre en compte la condition initiale :

$$\begin{aligned}
\bar{N}(0) &= N_0 \\
B\,e^{-\lambda \times 0} &= N_0 \\
B &= N_0
\end{aligned}$$

La solution au problème est donc :

$$\bar{N}(t) = N_0\,e^{-\lambda t}$$

L'évolution du nombre moyen de noyaux est exponentielle, une durée infinie est nécessaire pour complètement éliminer tous les noyaux radioactifs d'un échantillon.

6) Quelle est la dimension de la constante λ ? Que représente-t-elle ?

- λ est l'inverse d'un temps. C'est la probabilité de désintégration par seconde pour une famille de noyaux donnés.

1.2 Demi-vie radioactive

Définition. *On appelle demi-vie radioactive* $t_{1/2}$ *la durée au bout de laquelle le nombre moyen de noyaux radioactifs d'un échantillon a été divisé par 2 :*

$$\bar{N}(t+t_{1/2})=\frac{\bar{N}(t)}{2}$$

7) Exprimer $t_{1/2}$ en fonction de λ. La demi-vie radioactive dépend-elle du temps ?

- $$N_0\, e^{-\lambda(t+t_{1/2})}=\frac{N_0\, e^{-\lambda t}}{2}\Longleftrightarrow e^{-\lambda t_{1/2}}=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow -\lambda\, t_{1/2}=-\ln 2\Longleftrightarrow \boxed{t_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}}$$

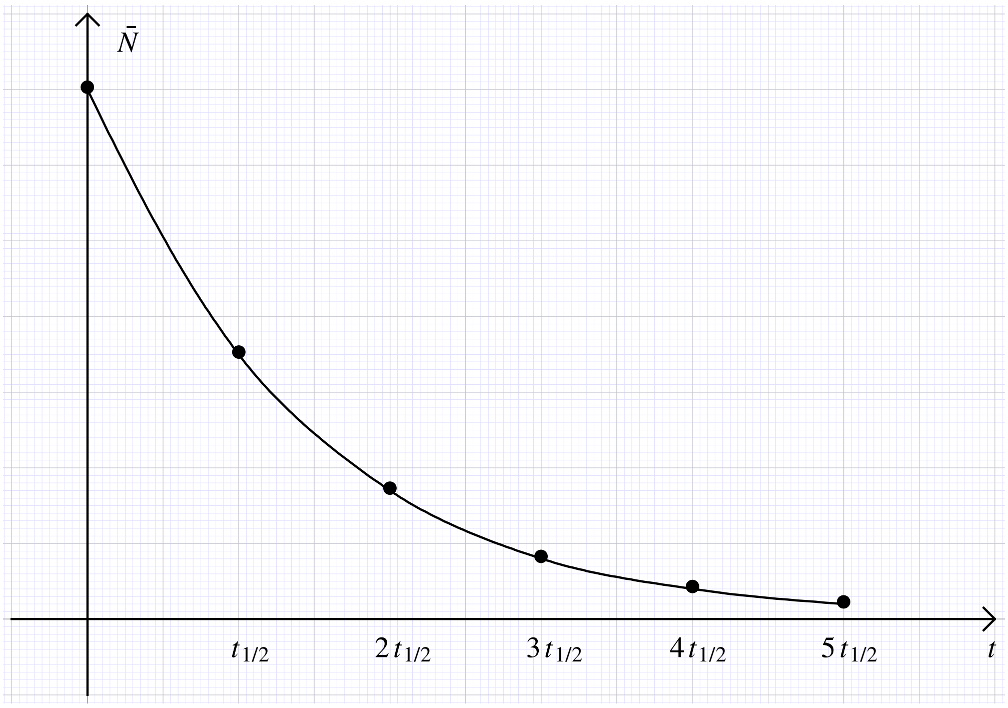
8) Justifier que $t_{1/2}$ et λ soient inverses l'une de l'autre.

- Plus la probabilité de désintégration à chaque seconde est grande, plus la demi-vie est petite.

9) Donner la relation qui existe entre le nombre moyen $\bar{N}(n\, t_{1/2})$ de noyaux qui restent dans un échantillon à la date $n\, t_{1/2}$ et N_0, le nombre initial de noyaux.
En déduire une méthode rapide de tracé d'une décroissance exponentielle à l'aide de $t_{1/2}$.

- $$\bar{N}(n\, t_{1/2})=\frac{N_0}{2^n}$$

On place le point $(0, N_0)$ sur le graphique $N=f(t)$. On place ensuite le point $(t_{1/2}, N_0/2)$, puis le point $(2\, t_{1/2}, N_0/4)$, puis le point $(3\, t_{1/2}, N_0/8)$, etc.



Note. La demi-vie radioactive $t_{1/2}$, comme la constante radioactive λ, est une *caractéristique de la famille de noyaux radioactifs*. Celle du polonium 210 est 138 jours, tandis que celle du bismuth 210 ne dépasse pas 5 jours. La période du thorium 232 est de $1{,}41 \cdot 10^{10}$ années, alors que celle du thorium 224 ne vaut que 1,05 s. On classe habituellement les noyaux en trois catégories :

– les noyaux stables ;

- les noyaux dont la demi-vie radioactive est de l'ordre de grandeur de l'âge de la Terre ($5 \cdot 10^9$ ans) et qui, depuis leur formation, n'ont pas eu le temps de tous disparaître ;
- les noyaux de demi-vie radioactive plus courte pour lesquels $t_{1/2}$ varie de quelques années à quelques microsecondes.

2 Activité d'un échantillon de noyaux radioactifs

10) Rappeler ce que l'on appelle **activité** A d'un échantillon de noyaux radioactifs.

▶ L'activité $A(t)$ d'une substance radioactive, à la date t, représente le nombre moyen de désintégrations par seconde

Note. L'unité de l'activité est le becquerel (symbole Bq) ; elle correspond à une désintégration par seconde.

$$1\,\text{Bq} = 1\,\text{désintégration/s}$$

11) Pourquoi l'activité est-elle une grandeur importante ?

▶ À chaque instant, un détecteur adapté permet de mesurer le nombre moyen de particules émises par unité de temps, nombre égal au nombre de désintégrations par unité de temps. Un détecteur mesure donc l'activité de l'échantillon.

12) Donner l'expression de l'activité $A(t)$ en fonction de $\bar{N}(t)$. En déduire que l'activité décroit exponentiellement.

▶ Par définition,

$$A(t) = \left|\frac{d\bar{N}}{\mathrm{dt}}\right| = \lambda\,\bar{N}(t)$$

donc

$$A(t) = \lambda\,N_0\,e^{-\lambda t}$$

ou

$$A(t) = A_0\,e^{-\lambda t}$$

si on pose $A_0 = \lambda\,N_0$ (activité de l'échantillon à la date $t = 0$).

Note.

- L'activité est proportionnelle au nombre moyen de noyaux susceptibles de se désintégrer à la date t.
- Elle est d'autant plus grande que la constante radioactive λ est grande, c'est à dire que la demi-vie radioactive est petite.
- Elle décroit très rapidement en début d'émission et voit sa variation diminuer au cours du temps.
- La mesure de l'activité à deux dates différentes permet de déterminer λ puis d'en déduire $t_{1/2}$. On trace généralement $\ln A(t)$.

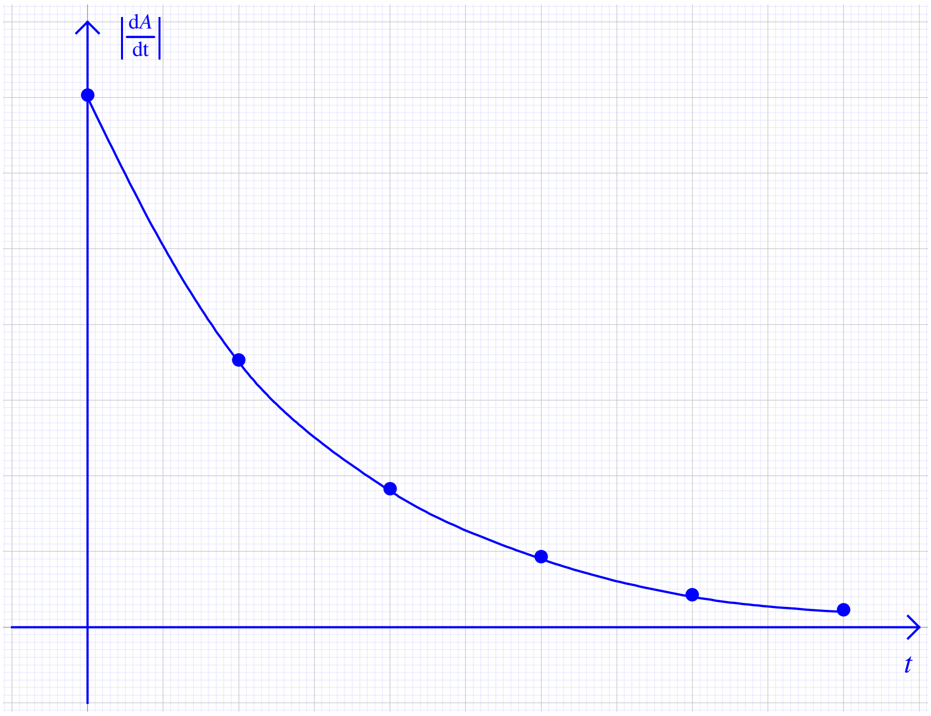
13) Démontrer la proposition « L'activité décroit très rapidement en début d'émission et voit sa variation diminuer au cours du temps ».

▶ L'évolution de la variation de l'activité au cours du temps s'obtient en étudiant la dérivée de la grandeur par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{dt}} = -\lambda\,A_0\,e^{-\lambda t}$$

En valeur absolue, on obtient :

$$\left|\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{dt}}\right| = \lambda A_0 e^{-\lambda t}$$



La vitesse de décroissance de l'activité est donc bien maximale pour $t = 0$ et diminue ensuite au cours du temps.

14) Quel est l'intérêt de tracer $\ln A(t)$ pour déterminer la valeur de λ ?

▶

$$\begin{aligned}
\ln A(t) &= \ln(A_0 e^{-\lambda t}) \\
&= \ln(A_0) + \ln(e^{-\lambda t}) \\
&= \ln(A_0) - \lambda t
\end{aligned}$$

L'évolution de $\ln A(t)$ est affine. λ est la valeur absolue de la pente de la droite, ce qui n'est pas difficile à déterminer expérimentalement, une fois la droite tracée.