

Transferts thermiques : comment modéliser l'évolution de la température d'un solide ?

Doc. 13,3

§1 Objectif

On comprend généralement qu'il est préférable de ne pas laisser une cuillère dans la casserole lors de la préparation d'une sauce, d'une soupe ou d'un confiture ! Toutefois, on peut utiliser sans danger une cuillère juste sortie du tiroir, mais pour **quelle durée** exactement ? Et si vous pouviez choisir, opteriez-vous pour la vieille cuillère en argent de votre grand-mère ou une d'un autre matériau ?

Dans ce document, on explore donc les concepts de « transfert d'énergie thermique » et de « durée ».

§2 Loi phénoménologique de Newton

Lorsqu'un *corps solide* est en contact avec un *fluide* (gaz ou liquide) à température différente, il existe un *transfert thermique* à travers la surface d'échange, selon un mécanisme **conductivo-convectif** :

- la **conduction** a lieu dans la *couche limite* du fluide, très mince, en contact direct avec la surface du corps ;
- la **convection** prend ensuite le relais pour transporter la chaleur dans le reste du fluide par son mouvement.

L'expression de la **puissance thermique échangée** φ , en watt, est donnée par la relation de Newton :

$$\varphi = hS(T_{\text{fluide}} - T_{\text{surface}})$$

où

- h est le *coefficient de convection thermique* (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$). h dépend du fluide, de la géométrie et du régime d'écoulement ;
- S est la surface de contact entre le corps et le fluide (en m^2) ;
- T_{surface} est la température de la surface du solide (en K ou $^{\circ}\text{C}$) ;
- T_{fluide} est la température locale du fluide environnant (en K ou $^{\circ}\text{C}$).

Remarque. Cette loi est *phénoménologique* : elle repose sur des observations expérimentales.

Remarque.

- Si $T_{\text{fluide}} > T_{\text{surface}}$, $\varphi > 0$, le solide reçoit effectivement de l'énergie du fluide ;
- Si $T_{\text{fluide}} < T_{\text{surface}}$, $\varphi < 0$, le solide cède de l'énergie au fluide.

Le flux thermique φ est une grandeur algébrique.

§3 Modélisation de la situation physique

Pour faciliter l'analyse, on supposera que la cuillère est constituée d'un *matériau homogène* et que *sa température restera uniforme en tout point, à chaque instant*¹. Une cuillère en métal s'approche de cette condition.

1. Cette hypothèse équivaut à considérer une conductivité thermique infinie !

On considérera également que le liquide en contact avec l'objet est maintenu à une température constante, et que le volume du liquide étant relativement grand comparé à celui de la cuillère, *l'immersion de la cuillère ne modifiera pas sa température*, qui restera constante durant toute l'expérience, comme le ferait celle d'un « thermostat ».

Cette modélisation permet de poser :

$$T_{\text{surface}} = T \quad \text{et} \quad T_{\text{fluide}} = T_1$$

où T est la température, uniforme, du solide et T_1 est la température, uniforme, du fluide.

§4 Données

- Masse de la cuillère en argent : 70 g ;
- Surface de la cuillère : $S = 90 \text{ cm}^2$;
- Capacité thermique massique de l'argent : $c_{Ag} = 235 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- Valeurs approximatives des coefficients de Newton pour un transfert conducto-convectif dans l'eau chaude : $h = 3000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, et dans l'air : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$;
- Température initiale de la cuillère : $T_0 = 21 \text{ }^\circ\text{C}$;
- Température de l'eau : $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$.

§5 Travail

Q1. On trempe la cuillère dans l'eau. Identifier le système étudié et l'environnement.

- Système = {cuillère}
- Milieu extérieur = {eau chaude}

Q2. Étudier le signe de φ et en déduire le sens du transfert thermique entre le système et l'environnement.

$T_1 > T_0$, la température du milieu extérieur est supérieure à la température du système. On a donc $\varphi > 0$, le système reçoit effectivement l'énergie thermique.

Q3. Écrire la relation donnée par le premier principe de la thermodynamique appliqué au système. Le relation finale doit faire apparaître m , c , T et Q .

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit :

$$\Delta E_{\text{tot}} = \Delta E_M + \Delta U = Q + W$$

avec E_M l'énergie mécanique et U l'énergie interne du système, Q l'énergie échangée par transfert thermique et W l'énergie échangée par travail des forces non conservatives.

Comme le système est immobile et que ses interactions macroscopiques avec l'environnement ne varient pas,

$$\Delta E_M = 0$$

Comme aucune force s'appliquant sur le système ne voit son point d'application se déplacer dans l'espace,

$$W = 0$$

Finalement,

$$\Delta U = Q$$

Comme le système est incompressible, $\Delta U = mc \Delta T$

$$mc \Delta T = Q$$

Q4. Dériver la relation de la question 3. par rapport au temps.

Remarque. Afin de bien comprendre le processus, il est préférable de revenir à la définition de la dérivation.

Puisque la température est une grandeur qui dépend du temps, la relation obtenue à la question précédente peut s'écrire :

$$mc \Delta T = Q \iff mc (T(t + \Delta t) - T(t)) = Q$$

Si on divise le tout par Δt , on obtient :

$$mc \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \frac{Q}{\Delta t}$$

La température T est supposée continue (hypothèse raisonnable). Il est donc possible de passer à la limite,

$$mc \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{\Delta t} \right)$$

ce qui s'écrit aussi,

$$mc \frac{dT}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad (1)$$

Q5. Donner la relation qui définit le flux thermique φ échangé par le système avec l'extérieur. Quelle est son unité ?

Par définition,

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (2)$$

Le flux thermique est une puissance, son unité est le watt ($1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$).

Q6. À l'aide des relations démontrées dans les questions 4. et 5., ainsi que de la loi de Newton, écrire l'équation différentielle qui décrit l'évolution de la température T du système.

$$mc \frac{dT}{dt} = \varphi \iff mc \frac{dT}{dt} = hS(T_1 - T)$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{mc} T = \frac{hS}{mc} T_1 \quad (3)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficients constants, avec un second membre.

Q7. La famille de solutions de l'équation précédente s'écrit :

$$T = A e^{-\frac{t}{\tau}} + B$$

Déterminer l'expression de la solution au problème, c'est à dire les expressions des paramètres A , B et τ .

1. La famille de solutions doit vérifier l'équation différentielle.

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

donc lorsqu'on injecte cette expression dans l'équation différentielle, on obtient :

$$-\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{hS}{mc} \left(A e^{-\frac{t}{\tau}} + B \right) = \frac{hS}{mc} T_1$$

ou

$$A \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{hS}{mc} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{hS}{mc} (B - T_1) = 0$$

La partie faisant intervenir l'exponentielle doit forcément être nulle puisque ce terme ne peut pas dépendre du temps. La seule solution acceptable est

$$\tau = \frac{mc}{hS}$$

La seconde partie est aussi forcément nulle. On a donc

$$B = T_1$$

La famille de solution convient donc si on écrit :

$$T = A e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1$$

avec $\tau = \frac{mc}{hS}$.

2. La solution doit vérifier la condition initiale.

$$T(0) = T_0 = A e^{-\frac{0}{\tau}} + T_1 \iff T_0 = A + T_1$$

Finalement

$$A = T_0 - T_1$$

La solution du problème est :

$$T = (T_0 - T_1) e^{-\frac{t}{\tau}} + T_1$$

avec $\tau = \frac{mc}{hS}$.

La température tend bien asymptotiquement vers T_1 pour $t \rightarrow \infty$. La température finale de la cuillère est celle de l'eau chaude.

Q8. Calculer la valeur de τ , *temps caractéristique* du problème.

Quelle conclusion peut-on tirer à partir de l'évaluation de ce résultat ?

A.N. $\tau = \frac{mc}{hS} = \frac{70 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 235 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}}{3000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \times 90 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 0,61 \text{ s}.$

On a vu dans le cours sur le dipôle (R, C) que le régime transitoire d'un phénomène qui évolue exponentiellement dure approximativement 5τ , c'est à dire ici 3 secondes. Cette cuillère n'est donc pas utilisable puisque sa température passe de 21 °C à 100 °C en 3 secondes.

Q9. Quelles modifications pourrait-on opérer de façon à rendre la cuillère utilisable

Pour augmenter la valeur de τ , on peut choisir une cuillère :

- de masse plus importante ;
- d'un autre matériau de capacité thermique plus grande ;
- de surface plus grande ;
- ...

Q10. La situation étudiée dans ce document est analogue à la charge d'un dipôle (R, C) soumis à un échelon de tension.

Compléter le tableau suivant :

Système	La cuillère	Le dipôle (R, C)
Grandeur dont on étudie l'évolution :		
Grandeur conservée :		
Flux échangé :		
Grandeurs caractéristiques du système :		
Expression du flux en fonction de la grandeur dont on étudie l'évolution :		
Loi qui traduit l'échange :		
Constante de temps :		

Système	La cuillère	Le dipôle (R, C)
Grandeur dont on étudie l'évolution :	Température T	Tension u_C
Grandeur conservée :	Énergie interne U	Charge électrique q
Flux échangé :	$\varphi = \frac{dQ}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$ (Pas un flux d'énergie !)
Grandeurs caractéristiques du système :	Capacité thermique C , coefficient de convection thermique h	Capacité du condensateur C , résistance R
Expression du flux en fonction de la grandeur dont on étudie l'évolution :	$\varphi = C \frac{dT}{dt}$	$i = C \frac{du_C}{dt}$
Loi qui traduit l'échange :	$C \frac{dT}{dt} = hS(T_1 - T)$	$C \frac{du_C}{dt} = \frac{E - u_C}{R}$
Constante de temps :	$\tau = \frac{mc}{hS}$	$\tau = RC$