

Détermination d'une incertitude-type

Doc. 0,1

Résumé

L'objectif de cette activité est de rappeler les deux types d'incertitudes (type A et type B) que l'on peut rencontrer lors du mesurage (mesure) d'une grandeur physique et de montrer comment on peut utiliser un langage de programmation pour les évaluer.

Info

L'**incertitude** peut se définir comme un paramètre associé au résultat d'un mesurage (une mesure) qui caractérise *la dispersion des valeurs* qui pourraient lui être raisonnablement attribués.

§1. Incertitude de type A : comment mesurer un volume d'eau ?

§1.1. Contexte

Un élève se pose la question suivante : « Pour effectuer une dilution avec de l'eau distillée, vaut-il mieux mesurer un volume de 100 mL de solution à l'aide d'un bécher gradué (avec une graduation à 100 mL) ou avec une fiole jaugée (avec un trait de jauge à 100 mL) ? »

Afin de répondre à cette question, aidé par des camarades, il met en œuvre le protocole suivant :

- Après avoir taré une balance et pris en compte la masse du bécher, il pèse 30 fois un volume de 100 mL d'eau mesuré grâce à la graduation du bécher.
- Il répète l'expérience en remplaçant le bécher par une fiole jaugée de 100 mL.
- Il recherche la valeur de la masse volumique de l'eau à la température de la salle dans laquelle il se trouve ($p_{u\{20^{\circ}C\}}$) : $\rho = 0,998 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$.
- À l'aide d'un programme écrit dans le langage de programmation Python, il calcule les volumes d'eau correspondant à toutes les masses mesurées.
- Afin d'avoir une idée de la répartition des valeurs des volumes, il trace leur histogramme.
- Il détermine finalement pour chaque série de mesures la **valeur moyenne** ainsi que l'**incertitude-type**.

§1.2. Objectif

L'objectif de cette activité est de reproduire les actions de l'élève à l'exception de la partie expérimentale dont les résultats sont données.

§1.3. Rappels

Info

L'**incertitude-type** associée à un résultat de mesurage est un *paramètre qui quantifie la dispersion des valeurs* pouvant raisonnablement être attribuées à la grandeur mesurée.

Lorsqu'elle est déterminée à partir de répétitions de mesures (incertitude de **type A**), l'incertitude-type correspond à l'écart-type expérimental.

i Info

Soit X une **variable aléatoire** représentant la grandeur mesurée, dont la loi de probabilité peut être quelconque et est inconnue.

Afin d'estimer l'espérance $E(X)$ et l'écart-type σ de la distribution entière, on prélève un échantillon de n observations **répétées** et **indépendantes** $x_1, x_2, \dots, x_n$ de X .

- L'estimation de l'espérance $E(X)$ de la distribution entière est alors donnée par la moyenne des n valeurs de l'échantillon :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- L'estimation de l'écart-type de la distribution entière est alors donnée par l'écart-type expérimental des n valeurs de l'échantillon :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Cet écart-type traduit la dispersion des mesures individuelles autour de leur moyenne.

i Info

- Si le résultat du mesurage est une valeur individuelle x , l'**incertitude-type** associée est définie par :

$$u(x) = s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- Lorsqu'on n'effectue pas une mesure unique, le résultat du mesurage est la valeur moyenne $\bar{x}$ et on définit l'**incertitude-type** par :

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

§1.4. Travail à réaliser

Les valeurs expérimentales sont fournies. Elles sont exprimées en gramme.

- Q1.** Définir la variable `masse_volumique_eau` et lui affecter la valeur de la masse volumique de l'eau donnée dans le protocole.

Réponse :

```
masse_volumique_eau = 0.998 # en g/mL
```

- Q2.** Définir la variable `volumes_dans_becher` et lui affecter une liste vide.

Réponse :

```
volumes_dans_becher = [] # en mL
```

- Q3.** À l'aide d'une boucle qui parcourt toutes les valeurs de la liste `masse_dans_becher`, calculer toutes les valeurs des volumes mesurés à l'aide du bécher et les ajouter à la liste référencée par la variable `volumes_dans_becher`.

Réponse :

```
for masse in masses_dans_becher:
    volume = masse / masse_volumique_eau
    volumes_dans_becher.append(volume)
```

Q4. Procéder de même pour la liste référencée par la variable `volumes_dans_fiole`.

Réponse :

```
volumes_dans_fiole = [] # en mL
for masse in masses_dans_fiole:
    volume = masse / masse_volumique_eau
    volumes_dans_fiole.append(volume)
```

i Info

La fonction `plt.hist` permet d'afficher l'histogramme d'une liste de valeurs.

Q5. Compléter le code afin d'afficher l'histogramme pour chacune des expériences.

Réponse :

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(volumes_dans_becher, bins=60, histtype='step',
        label='Bécher', edgecolor='green')
plt.hist(volumes_dans_fiole, bins=30, histtype='step',
        label='Fiole Jaugée', edgecolor='orange')
plt.title('Distribution des volumes mesurés')
plt.xlabel('Volume (mL)')
plt.ylabel('Fréquence')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Q6. Pour quel ensemble de valeurs la dispersion de ces valeurs est-elle la plus grande ?

Réponse : La dispersion est la plus grande pour le bécher.

i Info

La fonction `np.mean` calcule la valeur moyenne arithmétique d'une liste de valeurs passées en argument.

Q7. Définir les variables `moyenne_volumes_dans_becher` et `moyenne_volumes_dans_fiole` et leur affecter les valeurs moyennes des listes référencées par les variables `volumes_dans_becher` et `volumes_dans_fiole`.

Réponse :

```
moyenne_volumes_dans_becher = np.mean(volumes_dans_becher)
moyenne_volumes_dans_fiole = np.mean(volumes_dans_fiole)
```

Q8. Afficher les valeurs moyennes.

Réponse :

```
print(f"Bécher : Vmoy = {moyenne_volumes_dans_becher} mL")
print(f"Firole : Vmoy = {moyenne_volumes_dans_fiole} mL")
```

i Info

La fonction `np.std` calcule l'écart-type des valeurs de l'échantillon.

Remarque : Il est nécessaire d'utiliser comme second argument, après la liste des valeurs, `ddof = 1`, afin de s'assurer que la fonction utilise bien au dénominateur la valeur $N - 1$ et pas N .

- Q9.** Définir les variables `incertitude_volume_dans_becher` et `incertitude_volume_dans_fiole` et leur affecter les incertitudes-types d'une valeur unique dans les listes référencées par les variables `volumes_dans_becher` et `volumes_dans_fiole`.

Réponse :

```
incertitude_volume_dans_becher = np.std(volumes_dans_becher, ddof=1)
incertitude_volume_dans_fiole = np.std(volumes_dans_fiole, ddof=1)
```

- Q10.** Définir les variables `incertitude_type_dans_becher` et `incertitude_type_dans_fiole` et leur affecter les *incertitudes-types* des valeurs moyennes des listes référencées par les variables `volumes_dans_becher` et `volumes_dans_fiole`.
Afficher les valeurs des ces deux variables.

Réponse :

```
incertitude_type_dans_becher = incertitude_volume_dans_becher /
np.sqrt(len(volumes_dans_becher))
print(f"Bécher : u(x) = {incertitude_moyenne_dans_becher} mL")

incertitude_type_dans_fiole = incertitude_volume_dans_fiole / np.sqrt(len(volumes_dans_fiole))
print(f"Firole : u(x) = {incertitude_moyenne_dans_fiole} mL")
```

- Q11.** Les incertitudes-types calculées confirment-elles les observations réalisées à la question Q6. ?

Réponse : L'histogramme indique une dispersion plus importante des mesures réalisées avec le bécher. Cette observation est cohérente avec la valeur plus élevée de l'incertitude-type des mesures individuelles $u(\bar{x})$.

- Q12.** Comparer l'incertitude-type de la moyenne $u(\bar{x})$ obtenue avec le bécher et avec la fiole jaugée.
Quelle conclusion peut-on tirer concernant la fiabilité de la valeur moyenne obtenue avec chacun des deux instruments ?

Réponse : Comme n est identique dans les deux séries de mesures, l'instrument qui présente la plus petite incertitude-type $u(\bar{x})$ aura également la plus petite incertitude-type sur la moyenne $u(\bar{x})$. La fiole jaugée ayant une dispersion plus faible, elle conduit donc à une moyenne plus stable et plus fiable. On conclut que la fiole jaugée permet une meilleure estimation de la grandeur mesurée.

§2. Incertitude de type B : évaluation d'une incertitude-type

§2.1. Rappels

i Info

Il n'est pas toujours nécessaire d'effectuer une série de mesures pour évaluer une incertitude-type. Celle-ci peut être estimée à partir d'informations fournies par un certificat d'étalonnage, la classe d'un instrument ou la documentation du constructeur. On parle alors d'incertitude-type de **type B**.

Cas	Incertitude-type
Mesure simple sans autre information	$s = \frac{\text{dernier chiffre}}{2\sqrt{3}}$
Lecture unique d'un indicateur analogique (cadran, régle, etc.)	$s = \frac{\text{plus petite graduation}}{2\sqrt{3}}$
Lecture double d'un indicateur analogique (régle, oscilloscope, etc.)	$s = \sqrt{2} \frac{\text{plus petite graduation}}{2\sqrt{3}}$
Classe d'un instrument de type a	$s = \frac{a}{\sqrt{3}}$
Précision de type $\pm a\%$	$s = \frac{a \times \text{valeur}}{\sqrt{3}}$
Multimètre digital (précision, résolution)	$s = \frac{\text{mesure} \times \text{précision \%} + \text{nbre digits} \times \text{résolution}}{\sqrt{3}}$

Tableau 1. – Quelques cas usuels d'évaluation d'une incertitude-type sans répétition d'expérience.

§2.2. Évaluation de l'incertitude-type d'une résistance

Un conducteur ohmique possède une résistance dont la valeur est donnée par quatre anneaux de couleurs : brun, noir, noir, or.

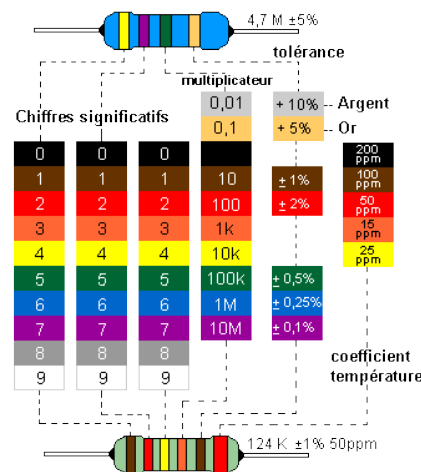


Fig. 1. – Code international des couleurs des résistances.

Q13. Déterminer la valeur de la résistance, ainsi que la tolérance annoncée par le constructeur.

Réponse : $R = 10 \Omega$ et $t = 5 \%$.

Q14. En déduire la valeur de l'incertitude-type $u(R)$.

Réponse : On est ici dans le cas d'une information sur la précision : $t = 5 \%$. L'incertitude-type est donc égale à :

$$u(R) = \frac{tR}{\sqrt{3}} = \frac{0,05 \times 10 \, \Omega}{\sqrt{3}} = 0,29 \, \Omega$$

§2.3. Évaluation de l'incertitude-type lors de la mesure de la période des ultrasons

Un signal ultrasonore est enregistré à l'aide d'un récepteur adapté et visualisé à l'aide d'un oscilloscope. La sensibilité horizontale est sur le calibre $5 \, \mu\text{s} \cdot \text{div}^{-1}$.

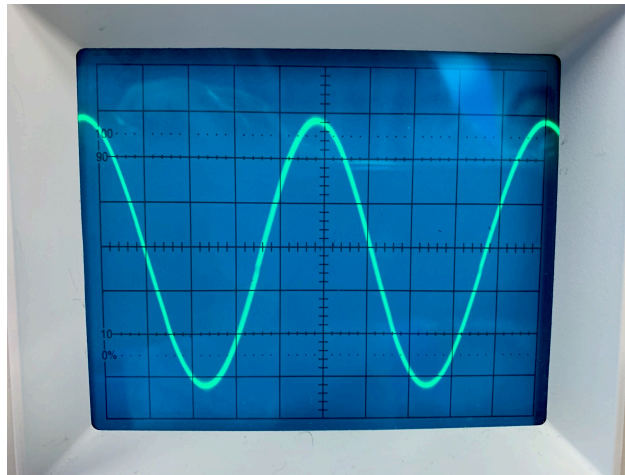
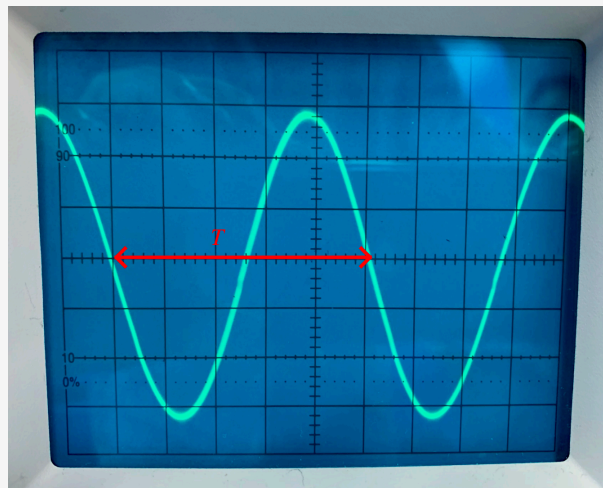


Fig. 2. – Affichage du signal ultrasonore sur l'écran de l'oscilloscope.

Q15. Déterminer la valeur de la période T du signal.

Réponse :



Une période du signal à l'écran s'étale sur 5 divisions. La période T mesurée vaut donc :

$$T = 5 \times 10^{-6} \, \text{s} \cdot \text{div}^{-1} \times 5 \, \text{div} = 25 \times 10^{-6} \, \text{s}$$

Q16. Évaluer l'incertitude-type $u(T)$ associée à la mesure de la période T .

Réponse : La mesure de la période nécessite deux lectures (début et fin de la période). Comme la plus petite graduation vaut $0,2 \, \text{div} \times 5 \times 10^{-6} \, \text{s} \cdot \text{div}^{-1} = 1 \times 10^{-6} \, \text{s}$,

$$u(T) = \sqrt{2} \frac{1 \times 10^{-6} \, \text{s}}{2 \times \sqrt{3}} = 0,4 \times 10^{-6} \, \text{s}$$

§2.4. Évaluation de l'incertitude donnée par un multimètre digital

On utilise un multimètre digital VOLTcraft, modèle VC-404, sur le calibre 200 V.

Cet appareil possède 4 digits plus le signe (+ ou –), plus le séparateur décimal. Sur le calibre 200 V l'incertitude de la mesure est donnée par $\pm(0,5\% + 2 \text{ digits})$, avec une résolution de 100 mV, par le constructeur.



Q17. À partir des informations sur les « digits », indiquer l'affichage que donne le multimètre pour une tension égale à -123 V , sur le calibre 200 V.

Réponse : L'affichage est : -123.0 , soit 4 digits pour les chiffres, un digit pour le séparateur décimal et un digit pour le signe.

Q18. Que représente une résolution de 100 mV ?

Réponse : La résolution est la plus petite valeur de la tension affichable. Elle est égale à 0,100 V lorsqu'on est sur le calibre 200 V.

On mesure une tension $U = 30 \text{ V}$ à l'aide de ce multimètre, sur le calibre 200 V.

Q19. À l'aide de l'information sur la « précision » donnée par le constructeur, déterminer l'incertitude-type associée à la mesure.

Réponse : L'incertitude-type se calcule, dans le cas de figure, à l'aide de la formule :

$$u(V) = \frac{\text{mesure} \times \text{precision \%} + \text{nbre digits} \times \text{résolution}}{\sqrt{3}}$$

où mesure est la valeur mesurée, precision % la précision de cette mesure, nbre digits le nombre de digits donné par le constructeur et résolution la résolution donnée par le constructeur.

$$u(V) = \frac{30 \text{ V} \times 0,005 + 2 \times 0,100 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,2 \text{ V}$$