Les graphes : structure de données

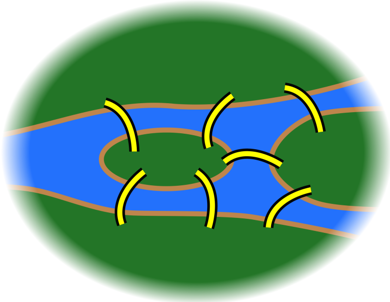
Chapitre 17,1

Table des matières

---

1 Un peu d'histoire : Les Ponts de Königsberg

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad en Russie) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles.

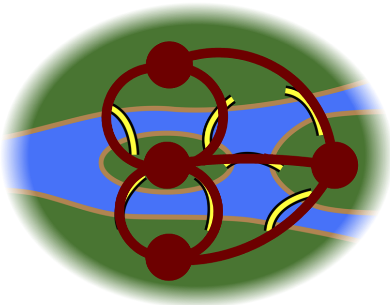


1) Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de *passer une et une seule fois par chaque pont*, et de *revenir à son point de départ*, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts ?

2) Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de *passer une et une seule fois par chaque pont* ?

Comment Euler a-t-il résolu le problème en 1735 ?

Il a représenté les quartiers par des nœuds et les ponts par des arêtes et cherché si un parcours passant par toutes les arêtes une et une seule fois existait.



2 Graphes

Définition. *Un* ***graphe*** *est un objet abstrait composé d'****éléments*** *— les* sommets *— et de* ***relations entre ces éléments*** *— les* arêtes *(graphes non orientés) ou les* arcs *(graphes orientés).*

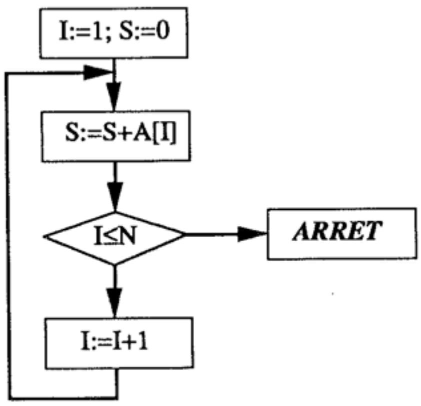
Un graphe peut être :

- ***orienté*** *ou* ***non orienté*** *;*
- ***pondéré*** *ou* ***non pondéré****.*

Un graphe permet de représenter des liens d'amitié entre des personnes, des lignes aériennes entre des villes, des câbles entre des ordinateurs, des références entre des pages web, etc. Ce concept est utilisé dans l'industrie (informatique, recherche opérationnelle, etc) mais aussi dans la recherche (étude de réseaux sociaux, biologie, mathématiques, etc.)

Exemples particuliers de graphes

Graphe du flot de contrôle d'un programme. Les sommets sont les instructions ou les tests, les flèches indiquent les enchaînements possibles entre ceux-ci.



3) Le graphe associé à ce flot de contrôle est-il orienté ou non orienté ?

Organisation de tâches qui doivent être exécutées séquentiellement. Les sommets sont les tâches, les relations existent entre les tâches terminées et celles qui les suivent.

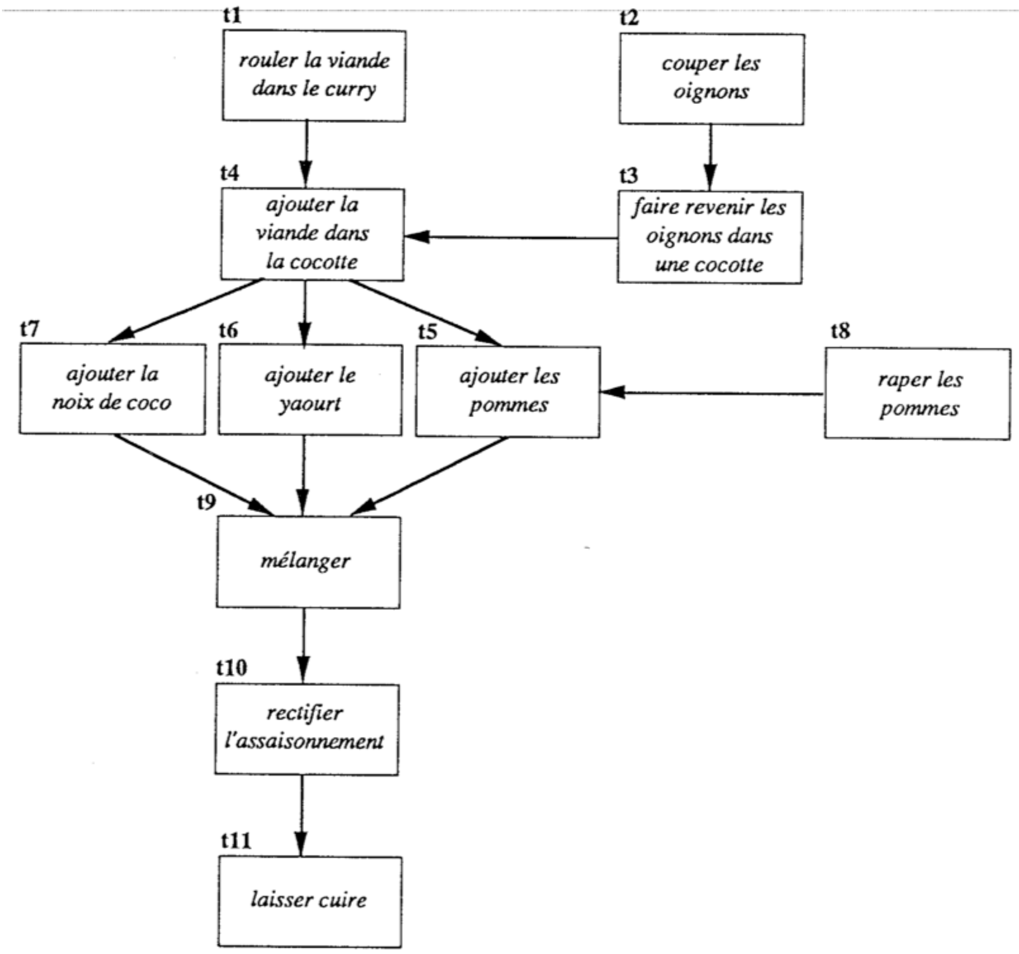


Figure 1. *Préparation d'un curry d'agneau.*

4) Pourquoi une file ne peut-elle pas être utilisée ici ?

5) Pourquoi un arbre ne peut-il pas être utilisé ici ?

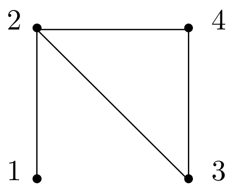
3 Graphes non orientés

3.1 Définitions

Définition. (Graphe non orienté) *Un graphe non orienté G est défini par un couple $G = (V, E)$, où V est un* ***ensemble de sommets (vertex)*** *et E un* ***ensemble d'arêtes (edges)****.*

Un graphe non orienté peut être vide ; on a alors $V = \emptyset$ et $E = \emptyset$.

Exemple 1.



6) Pour le graphe de l'exemple 1, donner l'ensemble V des nœuds, puis l'ensemble E des arêtes.

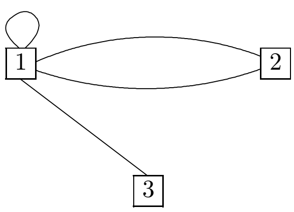
7) Soit le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{a, c\}\}$.
Représenter G.

Définition. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.*

– *Une* ***boucle*** *est une arête $\{u, u\}$ avec $u \in V$;*

– *Une arête $e = \{u, v\}$ est* ***multiple*** *s'il existe au moins deux arêtes $\{u, v\}$ dans E.*

Exemple 2.



Définition. *Un graphe non orienté* ***simple*** *G ne possède ni boucle ni arête multiple.*

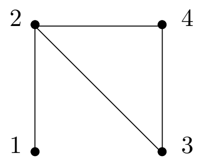
Dans ce cours, on suppose a priori que tous les graphes non orientés sont simples.

3.2 Vocabulaire

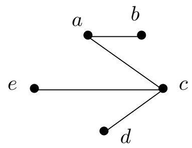
Définition. *Tous les **sommets voisins** v_i d'un sommet u, c'est à dire liés à u par la formation d'une arête, $\{u, v_i\}$ constituent l'ensemble des **sommets adjacents** à u.*

On appelle degré d'un sommet le nombre de sommets adjacents à ce sommet.

8) Pour le graphe de l'exemple 1,



indiquer l'ensemble des sommets adjacents au sommet 4 ainsi que son degré.
Même question pour le sommet 1.
Même question pour le sommet 2.

9) Pour le graphe 

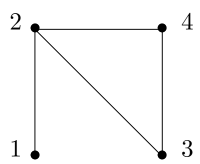
indiquer l'ensemble des sommets adjacents au sommet c et son degré.

Théorème. *Pour tout graphe $G = (V, E)$ non orienté, simple, la somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arrêtes.*

Définition. (Chaîne) *Une chaîne de longueur ℓ est une séquence de $\ell + 1$ sommets $(v_0, v_1, \dots, v_\ell)$ telle que, pour $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$, $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$.*
La longueur ℓ de la chaîne est donc égale au nombre d'arrêtes entre v_0 et v_n.

Par convention, on dit qu'il existe un chemin de longueur 0 de tout sommet vers lui-même.

10) Pour le graphe de l'exemple 1,



donner trois chaînes différentes ainsi que leur longueur.

Définition. (Chaîne élémentaire) *Une **chaîne élémentaire** est une chaîne qui* ne passe pas deux fois par le même sommet.

Définition. (Cycle) *Un* ***cycle*** *est une chaîne fermée (i.e. telle que* $v_n = v_0$*).*

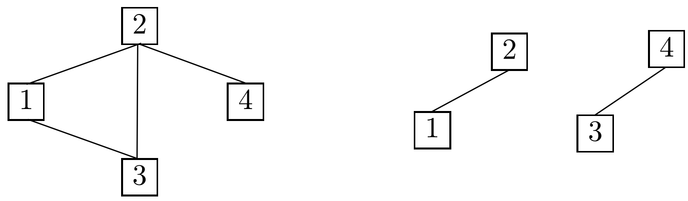
11) Le graphe de l'exemple 1 contient un cycle. Indiquer ce cycle.

Proposition. *Si* $G = (V, E)$ *est un graphe non orienté, sans cycle, alors* $m \leqslant n - 1$ *avec* m *le nombre d'arêtes et* n *le nombre de sommets.*

Proposition. *Si* $G = (V, E)$ *est un graphe non orienté qui comporte au moins un cycle alors* $m \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ *avec* m *le nombre d'arêtes et* n *le nombre de sommets.*

Définition. (Graphe connexe) *Un graphe non orienté connexe est tel que, pour tout couple* $(u, v) \in V^2$*, il existe une chaîne élémentaire entre* u *et* v*.*

12) Les deux graphes suivants sont-ils connexes ?



a) b)

3.3 Relation entre les structures de graphe et d'arbre

3.3.1 Rappels

Définition. (Arbre, définition informelle) *Une structure d'arbre est un ensemble de* nœuds*, organisés de façon hiérarchique, à partir d'un nœud identifié comme la* racine*.*

Définition. (Arbre binaire) *Un arbre binaire est :*

- *soit vide :* $\emptyset$
- *soit un nœud (la* racine*) qui a pour enfants deux arbres binaires :* (o, B_1, B_2)

$$B = \emptyset + (o, B_1, B_2)$$

avec $(o, B_1, B_2) \neq (o, B_2, B_2)$

Arbre (enraciné) (définition récursive)
Un arbre enraciné est formé d'un nœud, la **racine**, o qui possède pour enfants une liste finie (éventuellement nulle) d'arbres (éventuellement disjoints, forêt).

$$A = (o, F) \text{ avec } F = \emptyset + A + (A, A) + (A, A, A) + \cdots$$

Remarque. Dans la définition d'un arbre on ne différencie pas un sous-arbre gauche d'un sous arbre droit. Tous les arbres sont équivalents dès l'instant où on retrouve les mêmes branches.

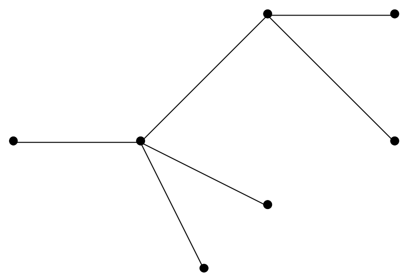
Avertissement. *L'ensemble des arbres binaires n'est pas un sous-ensemble de l'ensemble des arbres.*

3.3.2 Qu'est-ce qu'un arbre ?

Définition. *Soit $T=(V,E)$ un graphe non orienté. T est un **arbre** (enraciné) si T est un graphe **connexe, sans cycle élémentaire**, dans lequel on a désigné un nœud comme étant la racine.*

Remarque. La définition de la profondeur d'un nœud donnée dans le chapitre sur les arbres binaires n'est autre que la définition de la longueur de la chaîne qui relie ce nœud à la racine.

Exemple 3.



Proposition. *Un arbre T est un graphe $T=(V,E)$ connexe, sans cycle, pour lequel $m=n-1$ avec m le nombre d'arêtes et n le nombre de sommets. La réciproque est vraie.*

3.4 Éléments de réflexion

Soit $G=(V,E)$ un graphe non orienté, possédant n sommets. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- G est un graphe connexe sans cycle,
- G est un arbre,
- G est connexe et si on supprime une arête, il n'est plus connexe,
- G est connexe avec $(n-1)$ arêtes,
- G est sans cycle et en ajoutant une arête, on crée un cycle,
- G est sans cycle avec $(n-1)$ arêtes,

– tout couple de sommets de V est relié par une chaîne et une seule.

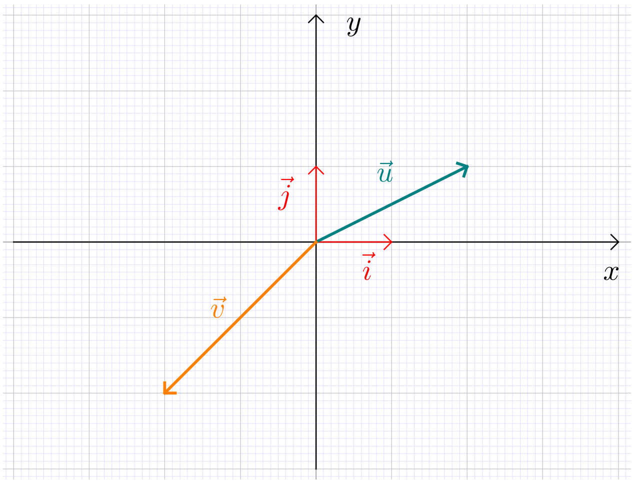
3.5 Représentations d'un graphe non orienté

On peut représenter les graphes de plusieurs manières. On peut distinguer deux grandes classes de représentations, selon que l'on privilégie le fait qu'un graphe est un ensemble non orienté d'arêtes E, ou un ensemble de sommets V.

3.5.1 Matrice sommet-sommet pour un graphe non orienté : matrice d'adjacence

Définition. *Une matrice est un tableau de nombres qui indique la relation qui existe entre deux vecteurs. C'est donc aussi la transformation qu'il faut opérer sur le premier vecteur pour trouver le second.*

Exemple 4.



On constate que $v_x = -u_x + 0\,u_y$ et $v_y = 0\,u_x - 2\,u_y$.
La matrice qui traduit cette transformation est alors :

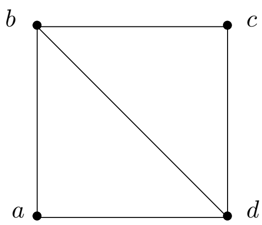
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et la relation entre les vecteurs s'écrit

$$\vec{v} = M\vec{u}$$

Si on étend la définition des vecteurs à d'autres domaines que la géométrie, on peut définir une matrice pour chaque transformation linéaire.

Exemple 5. On considère le graphe non orienté suivant :



13) Compléter le tableau à deux dimensions suivant :

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

- *Indiquer par un 1 si les sommets sont adjacents, par un 0 s'ils ne le sont pas ;*
- *Un sommet n'est adjacent avec lui-même que s'il existe une boucle.*

Définition. (Matrice d'adjacence) *Soit $G=(V,E)$ un graphe non orienté, possédant n sommets. On appelle matrice d'adjacence la matrice $n\times n$, dont les éléments appartiennent à l'ensemble $\{0,1\}$, telle que*

$$M_{i,j}=1 \quad si \quad \{u_i,u_j\}\in E$$
$$M_{i,j}=0 \quad si \quad \{u_i,u_j\}\notin E$$

14) Écrire la matrice sommet-sommet ou matrice d'adjacence de ce graphe.

Théorème. *La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à la diagonale.*

Intérêt de la matrice d'adjacence *La matrice d'adjacence indique toutes les chaînes de longueur 1 à partir d'un nœud.*

Théorème. (Hors programme) *Soit M^p la puissance p-ième de la matrice M. Le coefficient $M^p_{i,j}$ est égal au nombre de chaînes de longueur p du graphe G dont l'origine est le sommet u_i et l'extrémité le sommet u_j.*

Exemple 6. (Retour sur le graphe de l'exemple 5)

```
>>> import numpy as np
>>> M = np.array([[0,1,0,1],[1,0,1,1],[0,1,0,1],[1,1,1,0]])
>>> M2 = np.dot(M, M)
array([[2, 1, 2, 1],
       [1, 3, 1, 2],
       [2, 1, 2, 1],
       [1, 2, 1, 3]])
```

- Il existe deux chaînes de longueur 2 qui relient a à a : (a,b,a) et (a,d,a) ;
- Il existe une chaîne de longueur 2 qui relie a à b : (a,d,b) ;
- Il existe deux chaînes de longueur 2 qui relient a à c : (a,b,c) et (a,d,c) ;
- ....
- Il existe trois chaînes de longueur 2 qui relient b à b : (b,a,b), (b,d,b) et (b,c,b) ;
- ....

15)
```
>>> M3 = np.dot(M2, M)
array([[2, 5, 2, 5],
       [5, 4, 5, 5],
       [2, 5, 2, 5],
       [5, 5, 5, 4]])
```

Trouver les cinq chaînes de longueur 3 qui relient a à b.

3.5.2 Liste d'adjacence

Une façon plus compacte de représenter un graphe consiste à associer à chaque sommet u la liste de ses voisins.

Définition. *La liste d'adjacence d'un graphe $G = (V, E)$, non orienté, est la liste des sommets adjacents à chaque sommet.*

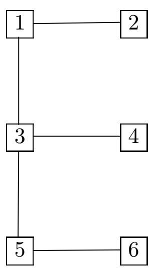
16) Donner la liste d'adjacence du graphe de l'exemple 4.

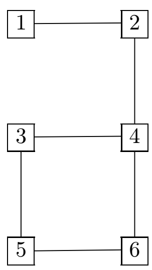
3.6 Exercices sur les graphes non orientés

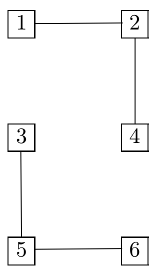
Exercice 1. Dans cet exercice, on considère le graphe non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$, avec $V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$. On pose n_0 le nombre de sommets et m_0 le nombre d'arêtes.

1. Représenter le graphe G_0.
2. Donner les valeurs de n_0 et m_0.
3. Quels sont les sommets adjacents au sommet 3 ?
4. Quelles sont les arêtes incidentes au sommet 3 ?
5. Quel est le degré de chacun des sommets de G_0 ?
   Vérifier la validité du théorème qui dit que pour un graphe non orienté la somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arrêtes.
6. Donner une chaîne élémentaire de G_0 et un cycle élémentaire de G_0. Préciser dans chaque cas leurs longueurs respectives (en nombre d'arêtes).
7. Le graphe G_0 est-il connexe ? Justifier la réponse.

Exercice 2. Est-ce que les graphes non orientés suivants sont des arbres ? Justifiez vos réponses. Dans la négative, quelle(s) arête(s) doit on enlever/rajouter pour obtenir un arbre ?

a)


b)


c)


Exercice 3. Donnez tous les arbres différents à 1, 2, 3, 4 ou 5 sommets.

Exercice 4.

1. Soit le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ tel que $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}\}$.

   a. Représenter G_1.

   b. Donner la matrice d'adjacence de G_1.

   c. Donner la liste d'adjacence de G_1.

2. Mêmes questions pour le graphe défini par la matrice d'adjacence

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Mêmes questions pour le graphe défini par la liste d'adjacence

$$L_3 = \begin{cases} 1 \rightarrow [2] \\ 2 \rightarrow [1, 3] \\ 3 \rightarrow [2, 4, 5] \\ 4 \rightarrow [3] \\ 5 \rightarrow [3] \end{cases}$$

4. Mêmes questions pour le graphe défini par la matrice d'adjacence

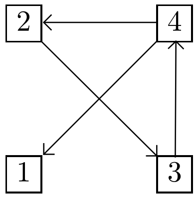
$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Que doit vérifier une matrice carrée M pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe non orienté simple ?

4 Graphes orientés

4.1 Définitions

Définition. *Un graphe orienté G est défini par un couple $G = (V, A)$, où V est un* ***ensemble de sommets*** *et A un* ***ensemble d'arcs****.*



$G = (V, A)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4\}$
et $A = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$

Avertissement. Pour un graphe non orienté, on parle d'arêtes $\{u, v\}$, pour un graphe orienté on parle d'arcs (u, v).

$$\{u, v\} = \{v, u\} \text{ (évident) mais } (u, v) \neq (v, u)$$

Définition. *Un graphe orienté est connexe si le graphe non orienté obtenue en remplaçant chaque arc par une arête est connexe.*

17) Le graphe G ci-dessus est-il connexe ?

4.2 Vocabulaire

Définition. (Successeurs) *Pour tout sommet $u \in V$, l'ensemble des sommets $\{v \in V, (u, v) \in A\}$ tels qu'il existe un arc (u, v) constitue l'ensemble des successeurs de u.*

18) Pour le graphe G ci-dessus, donner l'ensemble des successeurs du sommet 4 puis l'ensemble des successeurs du sommet 1.

Définition. (Prédécesseurs) *Pour tout sommet $u \in V$, l'ensemble des sommets $\{v \in V, (v, u) \in A\}$ tels qu'il existe un arc (v, u) constitue l'ensemble des prédécesseurs de u.*

19) Pour le graphe G ci-dessus, donner l'ensemble des prédécesseurs du sommet 4 puis l'ensemble des prédécesseurs du sommet 1.

Avertissement. Pour un graphe non orienté on parle de **sommets adjacents**, pour un graphe orienté on distingue les **sommets successeurs et prédécesseurs**.

Définition. (Chemin) *Un chemin de longueur ℓ est une séquence de $\ell + 1$ sommets $(v_0, v_2, \ldots, v_\ell)$ telle que, pour $i \in \{0, \ldots, \ell - 1\}$, $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in E$.*
La longueur ℓ du chemin est donc égal au nombre d'arcs entre v_0 et v_n.

Avertissement. Pour un graphe non orienté on parle de **chaîne**, pour un graphe orienté on parle de **chemin**.

20) Pour le graphe G ci-dessus, donner trois chemins différents.

Définition. (Chemin élémentaire) *Un chemin est dit élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.*

21) Pour le graphe G ci-dessus, donner un chemin qui n'est pas élémentaire.

Définition. (Circuit) *Un circuit est un chemin élémentaire ν tel que $v_{n+1} = v_n$.*
Un circuit élémentaire est un chemin élémentaire tel que $v_{n+1} = v_n$.

Avertissement. Pour un graphe non orienté on parle de **cycle**, pour un graphe orienté on parle de **circuit**.

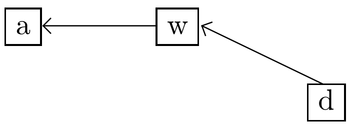
22) Pour le graphe G ci-dessus, donner un circuit. Ce circuit est-il élémentaire ?

4.3 Qu'est-ce qu'une arborescence ?

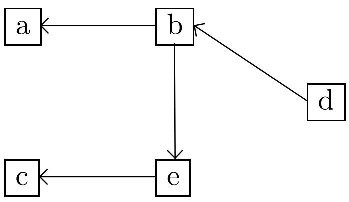
Définition. (Arborescence) *Une arborescence est un graphe orienté $G_r = (V, A)$ construit à partir d'un arbre $T = (V, E)$ et d'un sommet $r \in V$.*

1. *G_r et T ont les mêmes sommets ;*
2. *Les arcs de G_r correspondent aux arêtes de T orientés du sommet r vers les feuilles.*

r est la racine de G_r. Il s'agit de l'unique sommet de G_r sans prédécesseur.

Exemple 7. 

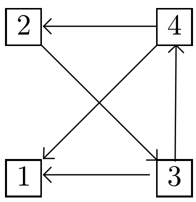
est une arborescence de racine d.

Exemple 8. 

est une arborescence de racine d.

4.4 Matrice sommet-sommet pour un graphe orienté

23) Soit le graphe orienté G tel que



$G = (V, A)$ avec $V = \{1, 2, 3, 4\}$
et $A = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$

Donner la matrice sommet-sommet R pour ce graphe.
Les règles de construction sont les suivantes :

- Les seules valeurs possibles dans cette matrice appartiennent à l'ensemble $\{0, 1\}$, donc

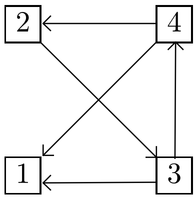
$$R[i, j] \in \{0, 1\}$$

– La valeur 1 est utilisée si le second sommet est successeur du premier sommet, donc

$$R[i,j]=1 \text{ si/si } (i,j)\in A$$

4.5 Listes de successeurs

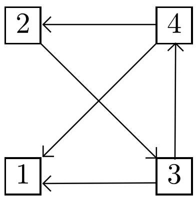
24) Soit le graphe orienté G tel que



Pour $i\in V$, $L[i]$ est la liste des sommets successeurs de i. Donner la liste L.

4.6 Listes de prédécesseurs

25) Soit le graphe orienté G tel que



Pour $i\in V$, $P[i]$ est la liste des sommets prédécesseurs de i. Donner la liste P.

4.7 Exercices sur le graphes orientés

Exercice 6. Dans cet exercice, on considère le graphe orienté $G_0=(V_0,A_0)$, avec $V_0=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ et $A_0=\{(1,2),(2,3),(3,1),(2,4),(3,4),(2,5),(3,5),(4,5),(5,4),(6,7)\}$.
On pose n_0 le nombre de sommets et m_0 le nombre d'arcs.

1. Dessiner le graphe G_0. Que valent n_0 et m_0 ?

2. Pour chaque sommet v de G_0, donner l'ensemble des successeurs de v et l'ensemble des prédécesseurs de v.

3. Donner un chemin élémentaire de G_0 et un circuit élémentaire de G_0, ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arcs) respectives.

4. Représenter le graphe non orienté G_0' associé à G_0 en enlevant l'orientation des arcs. Le graphe G_0 est-il connexe ? Justifier la réponse.

Exercice 7.

1. Soit le graphe $G_1 = (V_1, A_1)$ tel que $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A_1 = \{(1,2), (2,3), (3,1), (2,4), (3,4)\}$.

    a. Représenter le graphe G_1.

    b. Donner la matrice sommet-somme R_1.

    c. Donner la liste des successeurs de chaque sommet de G_1.

2. Donner toutes les informations pour le graphe G_2 défini par la matrice sommet-sommet suivante

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Donner toutes les informations pour le graphe G_3 défini par la matrice sommet-sommet suivante

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Donner toutes les informations pour le graphe G_4 défini par la liste des successeurs suivante

$$L_4 = \begin{cases} 1 \to [4, 5] \\ 2 \to [3] \\ 3 \to [2] \\ 4 \to [] \\ 5 \to [] \end{cases}$$