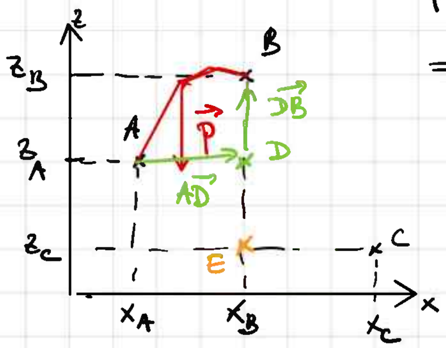
2.7 Travail du poids

1.1 Phase ascensionnelle : $A \to B$. Le poids est une force constante donc

$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AB}$ On remarque que la forme de la trajectoire n'intervient pas dans ce calcul.



$\Rightarrow$ Deux méthodes : * Analytique (calcul) ; * Géométrique

Méthode géométrique : on décompose $\vec{AB}$ en la somme de deux vecteurs dont l'un a une direction perpendiculaire à la direction de $\vec{P}$. $\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DB}$

Le travail est donc résistant.

Donc $W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AB} = \vec{P}.(\vec{AD} + \vec{DB}) = \underbrace{\cancel{\vec{P}.\vec{AD}}}_{=0} + \vec{P}.\vec{DB}$

$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{DB} = P \times (z_B - z_A) \times \cos(\pi) = -P(z_B - z_A)$
$= -mg(z_B - z_A) < 0$

Méthode analytique

$\vec{AB}\,(x_B - x_A,\ z_B - z_A)$ et $\vec{P}\,(0, -P)$ donc $\vec{P}.\vec{AB} = 0 \times (x_B - x_A) + (-P) \times (z_B - z_A)$
$= -P \times (z_B - z_A) = -mg \times (z_B - z_A)$

AN $W_{AB}(\vec{P}) = -280\ kg \times 9{,}8\ N.kg^{-1} \times (1500 - 300)\ m = -3{,}29 \times 10^6\ J$

1.2 Descente. $W_{BC}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{BC}$ le même raisonnement conduit à introduire le point E tel que $\vec{BC} = \vec{BE} + \vec{EC}$.

Le travail est moteur

$W_{BC}(\vec{P}) = \vec{P}.(\vec{BE} + \vec{EC}) = \vec{P}.\vec{BE} + \cancel{\vec{P}.\vec{EC}} = P \times BE \times \underbrace{\cos(0)}_{=1}$
$= P \times (z_B - z_E) = P \times (z_B - z_C)$
$= mg(z_B - z_C) > 0$

AN $W_{BC}(\vec{P}) = 280\ kg \times 9{,}8\ N.kg^{-1} \times (300 - 50) = 3{,}98 \times 10^6\ J$.

2 Deux méthodes : $W_{AC}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AC}$ et $W_{AC}(\vec{P}) = W_{AB}(\vec{P}) + W_{BC}(\vec{P})$
$= -3{,}29 \times 10^6\ J + 3{,}98 \times 10^6\ J$
$= 0{,}69 \times 10^6\ J$

$$W_{AC}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix} = -P \times (z_C - z_A)$$

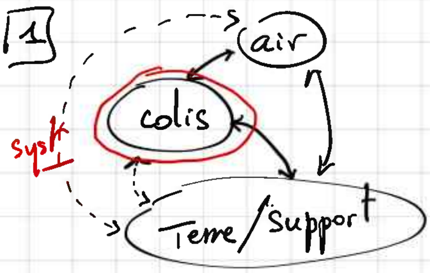
$W_{AC}(\vec{P}) = -mg(z_C - z_A)$

AN $W_{AC}(\vec{P}) = -280\ kg \times 9{,}8\ N.kg^{-1} \times (50 - 300)$
$= 0{,}69 \times 10^6\ J$

La valeur du travail du poids entre deux points est indépendante du chemin suivi.
On dit que $\vec{P}$ est une force conservative.

2.10 Exercice

1



Intéractions à prendre en compte :

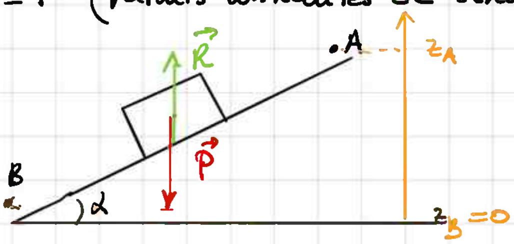
→ système ~~/~~ air — négligée

→ système – Terre — modélisée par le poids $\vec{P}$

→ système – Support — modélisée par la réaction $\vec{R}$

2 Le colis glisse à vitesse constante donc d'après le principe de l'inertie on peut dire qu'il est soumis à un ensemble de forces qui se compensent : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

Donc $\vec{R} = -\vec{P}$ (vecteurs colinéaires de sens opposés) et $R = P$.



$\sin(\alpha) = \dfrac{z_A - z_B}{AB} \iff (z_A - z_B) = AB \sin\alpha$

3 → $W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB} = -mg(z_B - z_A) = mg\,AB\sin(\alpha)$

AN $W_{AB}(\vec{P}) = 12\text{ kg} \times 9{,}8\text{ N.kg}^{-1} \times 6\text{ m} \times \sin(30°) = 3{,}5 \times 10^2\text{ J}$

→ $W_{AB}(\vec{R}) = ?$

Méthode 1 $W_{AB}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{AB}$ or $\vec{R} = -\vec{P}$, donc $W_{AB}(\vec{R}) = -\vec{P} \cdot \vec{AB}$
$= -W_{AB}(\vec{P})$

AN $W_{AB}(\vec{R}) = -3{,}5 \times 10^2\text{ J}$

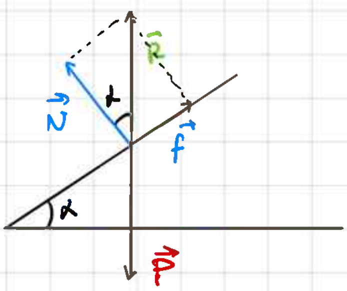
Méthode 2 cf. théorème de l'énergie cinétique section 3.

$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{R})$

or $\Delta E_c = 0$ puisque $v = cste$, donc $W_{AB}(\vec{R}) = -W_{AB}(\vec{P})$

Méthode 3 $\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$

$W_{AB}(\vec{R}) = \underbrace{\cancel{\vec{N} \cdot \vec{AB}}}_{0} + \underbrace{\vec{f} \cdot \vec{AB}}_{-f\,AB}$



$f = R\sin\alpha$

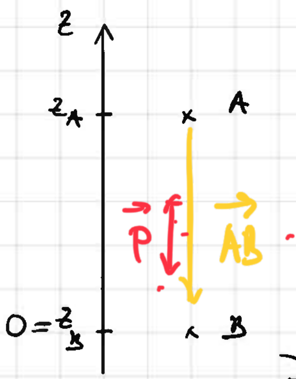
comme $R = P$, $f = P\sin\alpha$

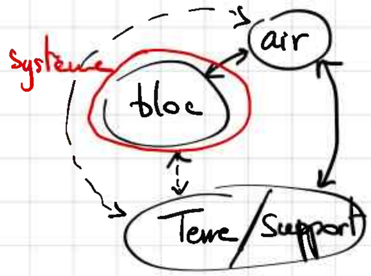
ou $f = mg\sin\alpha$

$W_{AB}(\vec{R}) = -f \cdot AB$

$W_{AB}(\vec{R}) = -mg\sin\alpha \cdot AB$

3.2 Théorème de l'EC





Interactions
$\rightarrow$ syst. – air : négligée
$\rightarrow$ syst. – Terre : $\vec{P}$

$\Rightarrow$ Théorème de l'énergie cinétique
$$\Delta E_c = W_{AB}(\vec{P})$$

Donc $E_c(B) - \underbrace{\cancel{E_c(A)}}_{0} = \vec{P}\cdot\vec{AB} = mgz_A > 0$ (tjs vérifier la cohérence du signe !)

comme $E_c(B) = \frac{1}{2} m v_B^2$, $\quad \frac{1}{2} m v_B^2 = m g z_A$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_B = \sqrt{2 g z_A}}$$

AN $v_B = \sqrt{2 \times 9{,}8\ \mathrm{N.kg^{-1}} \times 30\ \mathrm{m}} = 2{,}4 \times 10^1\ \mathrm{m/s}$

$W_{AB}(\vec{F}) = 0$
si $\vec{AB} = \vec{0}$
ou $\vec{AB} \perp \vec{F}$

v_B est indépendante de la masse du système !

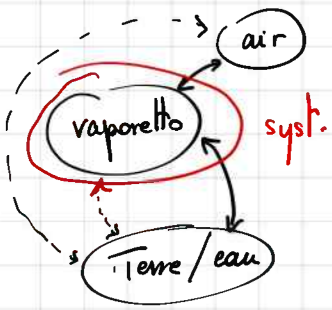
$$\boxed{\Delta E_c = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i)}$$
$$= E_c(B) - E_c(A)$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_I^2}$$
$$= mg(z_A - \cancel{z_B})$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_F^2 = \cancel{m} g z_A$$

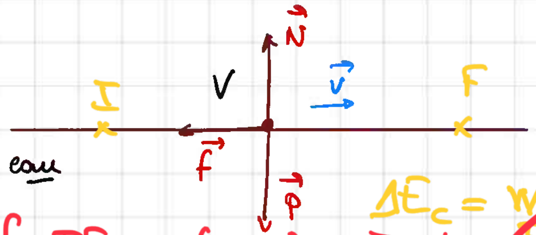
$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\vec{AB} = P \times AB \times \cos(0°) = \underset{>0}{P} \times \underset{>0}{AB}$$

3.3 Vaporetto



Interactions :
— syst. — air négligeable
— syst — Terre $\vec{P}$
— syst — eau $\vec{N}$, $\vec{f}$

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{f}$



$$W_{IF}(\vec{f}) = \vec{f}\cdot\vec{IF} = f \times IF \times \cos(180°) = -f \times IF$$

$$\Delta E_c = \cancel{W_{IF}(\vec{P})} + \cancel{W_{IF}(\vec{N})} + W_{IF}(\vec{f})$$

Si on note $\vec{F}$ la resultante des forces qui s'appliquent sur le vaporetto, alors

$$\Delta E_c = \underbrace{\cancel{E_c(B)}}_{=0} - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F})$$

{ A point où on coupe le moteur
{ B point où le bateau s'arrête

$$-\frac{1}{2} m v_A^2 = \vec{F}\cdot\vec{AB} = -F_{//} \times AB \quad \text{donc} \quad \boxed{F_{//} = \frac{m v_A^2}{2\times AB}}$$

En fait, on n'a pas accès à F mais à la projection de F sur $\vec{AB}$, $F_{//}$
Si on suppose que $\vec{F}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires, $F_{//} = F$

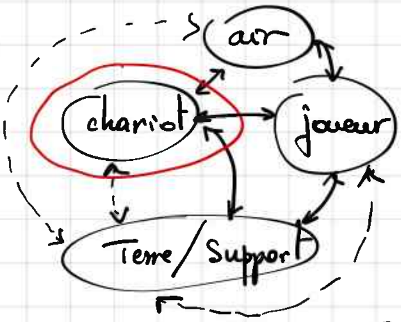
$$F = \frac{30\times10^3\ \text{kg} \times (9{,}3\times10^3/3600\ \text{m/s})^2}{2\times 15\ \text{m}} = 6{,}7\times10^3\ \text{N}$$

$$\frac{1}{IF}\times\Big(\underbrace{\cancel{\frac{1}{2} m v_F^2}}_{=0} - \frac{1}{2} m v_I^2\Big) = -f \times IF \times \frac{1}{IF}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{2}\frac{m v_I^2}{IF}}$$

3.4 Fête Foraine

1



Interactions

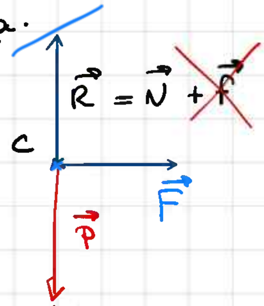
→ Syst. – air : négligée

→ Syst. – Terre : $\vec{P}$

→ Syst. – Support : $\vec{R}$

→ Syst. – Joueur : $\vec{F}$

Schéma.



$$\Delta E_c = E_c(B) - \underbrace{\cancel{E_c(A)}}_{0} = \underbrace{\cancel{W_{AB}}(\vec{P})}_{0} + \underbrace{\cancel{W_{AB}}(\vec{R})}_{0} + W_{AB}(\vec{F})$$

$E_c(B) = F \times AB$
$= 120\ N \times 1{,}2\ m$
$= 144\ J$

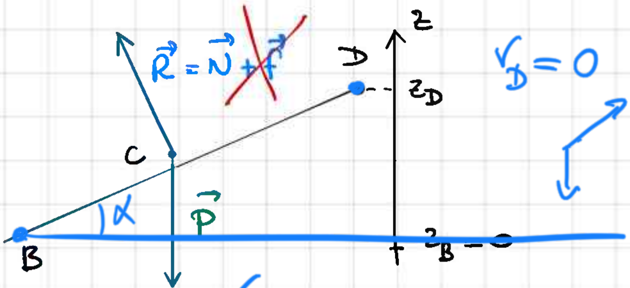
donc $\frac{1}{2} m v_B^2 = \vec{F}.\vec{AB} = F.AB \iff \boxed{v_B = \sqrt{\frac{2 F AB}{m}}}$

$F \times AB \times \underbrace{\cos(0)}_{1}$

AN $\quad v_B = \sqrt{\frac{2 \times 120\ N \times 1{,}2\ m}{5{,}0\ kg}} = 7{,}6\ m.s^{-1}$

2

On détermine l'altitude maximale atteignable.
La vitesse est alors nulle ($v_D = 0$)
→ La force $\vec{F}$ a disparu dans cette étape.



$v_D = 0$

$$\Delta E_c = \underbrace{\cancel{E_c(D)}}_{0} - E_c(B) = W_{BD}(\vec{P}) + \underbrace{\cancel{W_{BD}(\vec{R})}}_{0}$$

$$\Delta E_c = \cancel{E_c(D)} - E_c(B) = W_{BD}(\vec{P}) + \cancel{W_{BD}(\vec{R})}$$

or $\quad W_{BD}(\vec{P}) = \vec{P}.\vec{BD} = -mg(z_D - z_B) = -mg z_D < 0$

Finalement $\quad -\frac{1}{2} m v_B^2 = -mg z_D \iff \boxed{z_D = \frac{v_B^2}{2g}}$

$$\underbrace{-\underbrace{E_c(B)}_{>0}}_{<0} = \underbrace{W_{BD}(\vec{P})}_{<0}$$

AN $\quad z_D = \frac{(7{,}6\ m.s^{-1})^2}{2 \times 9{,}8\ N.kg^{-1}} = 2{,}9\ m$

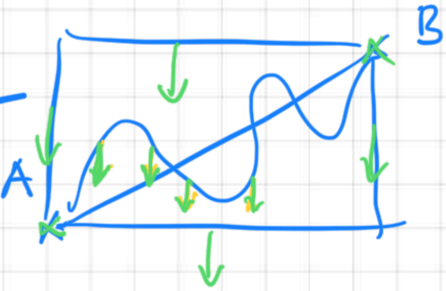
3

$h' < z_D$ car il ne faudrait pas négliger les frottements.

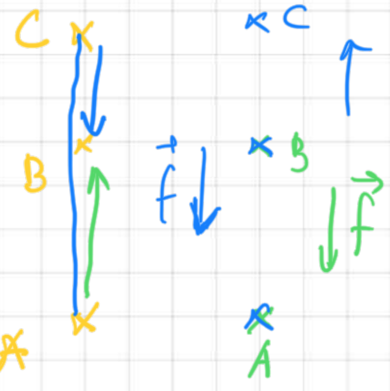
$$\vec{P}.\vec{BD} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B - x_B \\ z_D - z_B \end{pmatrix} = -P(z_D - z_B)$$

$$\boxed{W_{IF}(\vec{P}) = -mg(z_F - z_I)}$$

tout le temps.



$W_{AB}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$



$$\neq \left(\begin{array}{l} W_{AB}(\vec{f}) = -f \times AB. \\ W_{AB}(\vec{f}) = -f \times AC \\ \qquad\qquad - f \times CB \end{array} \right.$$